ОБ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ

Иванов Олег Александрович
математико-механический факультет СПбГУ

Самое опасное при обучении математике в школе — это загнать учащихся в прокрустово ложе используемых методов, схем и шаблонов.

Одной из составляющих математического мышления является «*гибкость мышления, свобода от сковывающего влияния трафаретов и шаблонов*».

В.А.Крутецкий

Речь далее пойдет о достаточно простых задачах, но которые заставляют задуматься

- о естественных методах решения;
- о логике проводимых рассуждений;
- об используемых понятиях;
- о взаимосвязях с другими задачами, методами, понятиями.

«Математика в школе»

1997, вып. 6: Обучение поиску решения задач (фантазии в манере Пойа).

2002, вып. 3: Интеллектуальное развитие школьников на уроках математики (с Т. Н. Ведерниковой).

2011, вып. 5: ЕГЭ и результаты первого семестра обучения.

2012, вып. 1: Итоги ЕГЭ–2011 по математике: кто виноват и что делать.

«Квант»

1994, вып. 6: Умеете ли вы решать «почти школьные» задачи?

2017, вып. 8: Метод координат: решения без лишних вычислений.

Книги

Алгебра в 9 классе. Уроки обобщающего повторения. СПб: «СМИО–Пресс», 2014 (С Т. Ю. Ивановой и К. М. Столбовым).

Алгебра в 9 классе. Функции и последовательности. СПб: «СМИО–Пресс», 2018 (С Т. Ю. Ивановой и К. М. Столбовым).

Задачи по алгебре и началам анализа. СПб: БХВ–Петербург, 2005.

Практикум по элементарной математике. Алгеброаналитические методы. М.: МЦНМО, 2001.

Математика 10–11, приятная во всех отношениях. Материалы для факультативных занятий. СПб: «СМИО–Пресс», 2014.

Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. М.: МЦНМО, 2009.

Задачи олимпиад Эйлера. СПб: «Левша. Санкт-Петербург», 2013 (с В. Б. Некрасовым и др.).

Немного неожиданные формулировки

1. Объясните, что произойдет с величиной положительной рациональной дроби, если ее числитель увеличить на 1, а знаменатель — на 2.
2. Выясните, является ли простым число 100903027.
3. Сколько существует пар (x, y) чисел, таких, что $2^x + 2^y = 2^{x+y}$?
4. Найдите все значения, которые принимает выражение $a^2 + 2a - b$, если $a \in [-2; 3]$ и $b \in [-2, 1]$.
5. Известно, что x^{199} и x^{213} — рациональные числа. Верно ли, что x должно быть рациональным?

Как обычно, решаем уравнения

Задача. Решите уравнения:

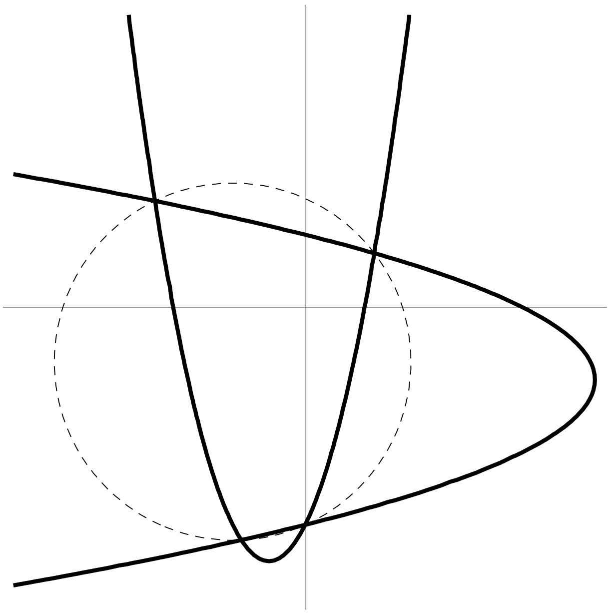
1) $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$; 2) $x^5 + 5x - 6 = 0$;

3) $x^5 + 5x - 5 = 0$; 4) $x^5 + 5x - 0{,}01 = 0$.

`0.0019999999999936000000001023999999997706240`

Тема: «Уравнение окружности»

Задача. Докажите, что все четыре точки пересечения парабол $y = 2x^2 + 2x - 3$ и $x = 3 - 2y - y^2$ лежат на одной окружности.



А давайте дадим подсказку

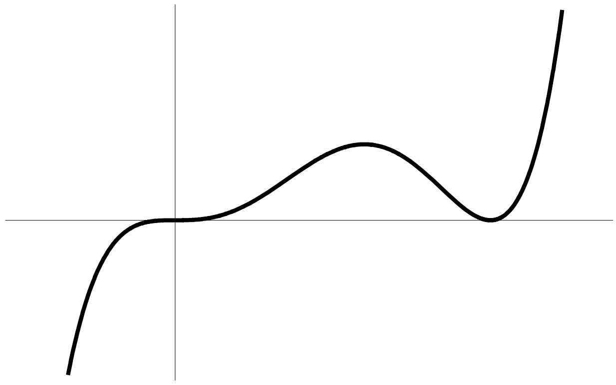
$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad af(x,y) + bg(x,y) = 0.$$

Тема: «Неравенства между средними двух чисел»

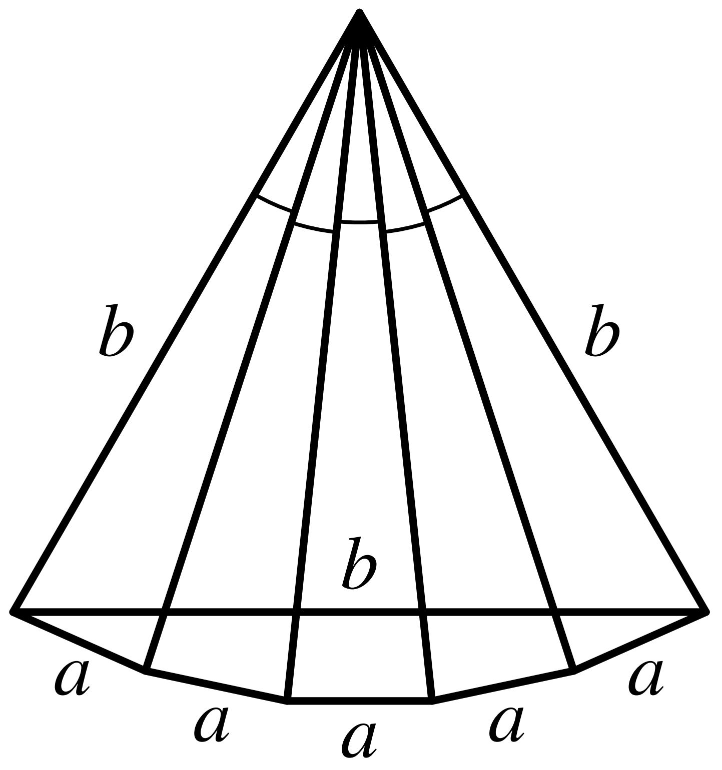
Задача. Из пункта А в пункт Б ведет железная дорога и рядом с ней — шоссе. Одновременно из А в Б отправились поезд и автомобиль. Пассажир поезда обратил внимание, что полдороги поезд двигался со скоростью 90 км/час, а полдороги — со скоростью 60 км/час. Водитель автомобиля заметил, что и он полдороги ехал со скоростью 90 км/час, а полдороги — со скоростью 60 км/час. Однако один из них прибыл в пункт назначения раньше другого. Определите, кто же это был, пассажир или водитель.

Здравый смысл и разумные ассоциации

Задача 1. Приведите пример многочлена, эскиз графика которого имеет следующий вид:



Задача 2. Пусть a — длина основания, b — длина боковой стороны равнобедренного треугольника, угол при вершине которого равен 12°. Докажите, что $b < 5a$.


b
b
b
a
a
a
a
a

«Интенсивное обучение», или: как решить десять задач за двадцать минут и что это может дать учащимся

Задача 1. Даны уравнения: 1) $\sqrt{x-2}=1$.
2) $\sqrt{x-2}=\sqrt{1-x}$. 3) $\sqrt{x-2}=1-x$.
4) $\sqrt{x-2}=4-x$. 5) $\sqrt{x-2}=100|x-3|+1$.
6) $\sqrt{x-2}=|x-3|$. 7) $\sqrt{1-x^2}=x^2+1$.
8) $\sqrt{2-x^2}=x^2+1$. 9) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=2$.
10) $\sqrt{x-2}-\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}$.
Выясните, какие из этих уравнений не имеют решений, какие имеют единственное решение, а какие — два решения.

Задача 2. Пусть $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 4-2x, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$

1) Выясните, нет ли противоречия в задании этой функции.

Решите уравнения: 2) $f(x) = 1$; 3) $f(x) = 3$;

4) $f\big(f(x)\big) = 1$. 5) Решите неравенство $f\big(f(x)\big) \leqslant 1$.

Постройте графики: 6) $y = f(x)$; 7) $y = f\big(f(x)\big)$.

8) Исследуйте на монотонность функцию $f\big(f(x)\big)$.

9) Докажите, что $f(x) = \min\{x+1, 4-2x\}$.

10) Задайте эту функцию формулой, в которой участвовали бы только так называемые «элементарные функции».

Уроки «обобщающего повторения» (по материалам совместной книги с Т. Ю. Ивановой и К. М. Столбовым)

- выполнение учениками домашнего задания по данной теме;
- обсуждение разных решений предложенных задач;
- решение дополнительных задач, связанных с идеями и методами, не использованными при решении задач домашнего задания;
- самостоятельная работа по теме.

Тема «Модуль»

Диагностическая домашняя работа

1. Найдите модули чисел:
а) $2-\sqrt{5}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}$; в) $\sqrt[3]{26}-\sqrt{10}$.

2. Решите уравнение $|x+3|=|2x-6|$.

3. Найдите все точки числовой прямой, расположенные: а) ближе к точке $A(-2)$, чем к точке $B(2)$; б) вдвое ближе к точке $A(-2)$, чем к точке $B(2)$.

4. Найдите все значения, которые принимает $|x|$, если: а) $|x+3|=2$; б) $|x+3|\leqslant 2$; в) $|x-1|<2$.

5. Решите уравнения:
а) $|x-1| = 1-x$; б) $|x^3+x| = x^3+x$.

6. Изобразите на плоскости множество, задаваемое:
а) неравенством $y \leqslant |x|$;
б) уравнением $|y-x| = x-y$.

7. Решите уравнения: а) $|x| + |2x-1| = 0$;
б) $|x-1|+|2x-3| = x-4$; в) $|x-1|+|x+1| = 2$.

8. Определите в зависимости от значения a количество решений уравнения: а) $|x-1| - x = a$;
б) $|2x-1| - x = a$; в) $\left|\frac{x}{2} - 1\right| - x = a$.

Понятия, методы и идеи

1) определение модуля числа и такое его свойство, как неотрицательность;
2) геометрический смысл модуля разности двух чисел;
3) анализ уравнений, основанный на свойствах модуля;
4) график модуля;
5) графическую интерпретацию уравнений;
6) понятие множества, заданного уравнением (неравенством).

В дополнение к ним отметим еще такие факты и методы, как:

7) решение уравнений вида $|A| = B$;

8) решение неравенств вида $|A| \leqslant B$ и $|A| \geqslant B$;

9) неравенства для модуля суммы и модуля разности двух чисел и их геометрическая интерпретация («неравенство треугольника»);

10) построение графиков кусочно-линейных функций.

1. Решите уравнение: а) $2x+1=|x-1|$;
   б) $|2x+1|=x-1$; в) $|2x+1|=|x-1|$.

2. Решите неравенство: а) $2x+1\leqslant|x-1|$;
   б) $|2x+1|\leqslant x-1$; в) $|2x+1|\leqslant|x-1|$.

3. Найдите все значения a, при которых уравнение $|2x+1|=x+a$ имеет решение.

4. а) Постройте график $y=|x+1|-|x|+|x-2|$.
   б) Определите (в зависимости от значения a) число решений уравнения $|x+1|+|x-2|=|x|+a$.

5. Найдите точки прямой, сумма расстояний от которых до $A(-1)$ и $B(1)$ равна расстоянию до $C(3)$.

Е. Н. Лысова
Уроки обобщающего повторения (на примере темы «Квадратичная функция»)

Дополнение к книге 2001 года
«Практикум по элементарной математике»

Пучки задач («problem clusters»)

Задача 1. Рассмотрим последовательности x_n, где $x_n = \dfrac{1}{2 - x_{n-1}}$.

а) Найдите x_{2018}, если известно, что $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

б) Докажите, что если $x_0 < 1$, то данная последовательность монотонна.

в) Найдите множество $\mathcal{C}$ чисел, которые не могут быть первыми членами бесконечных последовательностей, заданных указанным соотношением.

г) Найдите множество начальных членов x_0 бесконечных монотонных последовательностей.

Задача 2. Дана функция
$f(x) = \cos^3 x + a\cos^2 x \sin x + b\cos x \sin^2 x + \sin^3 x$.

а) Найдите a и b, если известно, что числа $\pm\frac{\pi}{4}$ являются корнями функции f.

б) Пусть $a = b = -1$. Решите неравенство $f(x) \leqslant 0$.

в) Пусть $b = -3$. Решите уравнение $f(x) = \cos 3x$.

г) Найдите все пары (a, b), при которых период функции f равен $\frac{2\pi}{3}$.

Задача 3. Каждую из граней куба закрашивают целиком белым или черным цветом. Раскраски называются одинаковыми, если эти кубы невозможно различить.

а) Найдите число различных раскрасок куба, в которых ровно две его грани — белые.

б) Найдите число различных раскрасок куба.

в) Двое людей по очереди раскрашивают грани куба. Закончив красить один куб, они принимаются за следующий. Докажите, что второй из них может красить так, чтобы все покрашенные ими кубы имели одну и ту же раскраску.

г) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании граней куба все его противоположные грани оказались закрашенными в противоположные цвета.

д) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании граней куба две его соседние грани оказались белыми, а все остальные его грани — черными.

е) Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании граней двух кубов оба этих куба окажутся одинаково раскрашенными.

Наконец, давайте «удивим» учащихся

Вопрос: почему таблица значений тригонометрических функций столь невелика?

Конечно, можно добавить $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, или же $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{16} = \ldots$

Теорема. Если $\alpha = \cos\dfrac{p\pi}{q} \in \mathbb{Q}$, то $\alpha = 0; \pm\dfrac{1}{2}; \pm 1$.

Лемма 1. Если $\varphi = \dfrac{p\pi}{q}$, то множество $\left\{\cos 2^n\varphi\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ конечно.

Лемма 2. Если $\alpha = \cos\varphi \in \mathbb{Q}$ и $\alpha \neq 0; \pm\dfrac{1}{2}; \pm 1$, то множество $\left\{\cos 2^n\varphi\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ бесконечно.