Рекуррентные последовательности второго порядка

Рекуррентные последовательности второго порядка

$$\alpha_b(0) = 0 \qquad \alpha_b(1) = 1 \qquad \alpha_b(n+2) = b\alpha_b(n+1) - \alpha_b(n) \qquad b \geq 2$$

Рекуррентные последовательности второго порядка

$$\alpha_b(0) = 0 \qquad \alpha_b(1) = 1 \qquad \alpha_b(n+2) = b\alpha_b(n+1) - \alpha_b(n) \qquad b \geq 2$$

$$0 < 1 < \alpha_b(2) < \cdots < \alpha_b(n) < \alpha_b(n+1) < \ldots$$

Диофантовость последовательности $\alpha_b(k)$

Основная лемма. *Существует многочлен* $Q(x, b, k, x_1, \ldots, x_m)$ *такой что*

$$b \geq 4 \ \& \ x = \alpha_b(k) \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{Q(x, b, k, x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$

Диофантовость последовательности $\alpha_b(k)$

Основная лемма. *Существует многочлен* $Q(x, b, k, x_1, \ldots, x_m)$ *такой что*

$$b \geq 4 \;\&\; x = \alpha_b(k) \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m \{Q(x, b, k, x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$

$$(b-1)^n \leq \alpha_b(n+1) \leq b^n \leq \alpha_{b+1}(n+1) \leq (b+1)^n$$

Матричное представление

$$\alpha_b(0) = 0 \quad \alpha_b(1) = 1 \quad \alpha_b(n+2) = b\alpha_b(n+1) - \alpha_b(n)$$

Матричное представление

$$\alpha_b(0) = 0 \quad \alpha_b(1) = 1 \quad \alpha_b(n+2) = b\alpha_b(n+1) - \alpha_b(n)$$

$$A_b(n) = \begin{pmatrix} \alpha_b(n+1) & -\alpha_b(n) \\ \alpha_b(n) & -\alpha_b(n-1) \end{pmatrix}$$

Матричное представление

$$\alpha_b(0) = 0 \quad \alpha_b(1) = 1 \quad \alpha_b(n+2) = b\alpha_b(n+1) - \alpha_b(n)$$

$$A_b(n) = \begin{pmatrix} \alpha_b(n+1) & -\alpha_b(n) \\ \alpha_b(n) & -\alpha_b(n-1) \end{pmatrix}$$

$$A_b(n+1) \quad = \quad A_b(n)\Psi_b$$

Матричное представление

$$\alpha_b(0) = 0 \quad \alpha_b(1) = 1 \quad \alpha_b(n+2) = b\alpha_b(n+1) - \alpha_b(n)$$

$$A_b(n) = \begin{pmatrix} \alpha_b(n+1) & -\alpha_b(n) \\ \alpha_b(n) & -\alpha_b(n-1) \end{pmatrix}$$

$$A_b(n+1) \quad = \quad A_b(n)\Psi_b$$

$$\Psi_b = \begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матричное представление

$$\alpha_b(0) = 0 \quad \alpha_b(1) = 1 \quad \alpha_b(n+2) = b\alpha_b(n+1) - \alpha_b(n)$$

$$A_b(n) = \begin{pmatrix} \alpha_b(n+1) & -\alpha_b(n) \\ \alpha_b(n) & -\alpha_b(n-1) \end{pmatrix}$$

$$A_b(n+1) \quad = \quad A_b(n)\Psi_b$$

$$\Psi_b = \begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матричное представление

$$\alpha_b(0) = 0 \quad \alpha_b(1) = 1 \quad \alpha_b(n+2) = b\alpha_b(n+1) - \alpha_b(n)$$

$$A_b(n) = \begin{pmatrix} \alpha_b(n+1) & -\alpha_b(n) \\ \alpha_b(n) & -\alpha_b(n-1) \end{pmatrix}$$

$$A_b(n+1) \quad = \quad A_b(n)\Psi_b$$

$$\Psi_b = \begin{pmatrix} b & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_b(n+1) = A_b(n)\Psi$$

Характеристическое уравнение

$$\det(A_b(n)) \quad = \quad \alpha_b^2(n) - \alpha_b(n+1)\alpha_b(n-1)$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}\det(A_b(n)) &= \alpha_b^2(n) - \alpha_b(n+1)\alpha_b(n-1)\\ &= \alpha_b^2(n+1) - b\alpha_b(n+1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n)\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$
\begin{aligned}
\det(A_b(n)) &= \alpha_b^2(n) - \alpha_b(n+1)\alpha_b(n-1) \\
&= \alpha_b^2(n+1) - b\alpha_b(n+1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \alpha_b^2(n-1) - b\alpha_b(n-1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \det(\Psi_b^n)
\end{aligned}
$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}
\det(A_b(n)) &= \alpha_b^2(n) - \alpha_b(n+1)\alpha_b(n-1) \\
&= \alpha_b^2(n+1) - b\alpha_b(n+1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \alpha_b^2(n-1) - b\alpha_b(n-1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \det(\Psi_b^n) \\
&= (\det \Psi_b)^n
\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}
\det(A_b(n)) &= \alpha_b^2(n) - \alpha_b(n+1)\alpha_b(n-1) \\
&= \alpha_b^2(n+1) - b\alpha_b(n+1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \alpha_b^2(n-1) - b\alpha_b(n-1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \det(\Psi_b^n) \\
&= (\det \Psi_b)^n
\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$
\begin{aligned}
\det(A_b(n)) &= \alpha_b^2(n) - \alpha_b(n+1)\alpha_b(n-1) \\
&= \alpha_b^2(n+1) - b\alpha_b(n+1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \alpha_b^2(n-1) - b\alpha_b(n-1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \det(\Psi_b^n) \\
&= (\det \Psi_b)^n
\end{aligned}
$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}
\det(A_b(n)) &= \alpha_b^2(n) - \alpha_b(n+1)\alpha_b(n-1) \\
&= \alpha_b^2(n+1) - b\alpha_b(n+1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \alpha_b^2(n-1) - b\alpha_b(n-1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \det(\Psi_b^n) \\
&= (\det \Psi_b)^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}
\det(A_b(n)) &= \alpha_b^2(n) - \alpha_b(n+1)\alpha_b(n-1) \\
&= \alpha_b^2(n+1) - b\alpha_b(n+1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \alpha_b^2(n-1) - b\alpha_b(n-1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \det(\Psi_b^n) \\
&= (\det\Psi_b)^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$x^2 - bxy + y^2 = 1$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}
\det(A_b(n)) &= \alpha_b^2(n) - \alpha_b(n+1)\alpha_b(n-1) \\
&= \alpha_b^2(n+1) - b\alpha_b(n+1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \alpha_b^2(n-1) - b\alpha_b(n-1)\alpha_b(n) + \alpha_b^2(n) \\
&= \det(\Psi_b^n) \\
&= (\det \Psi_b)^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$x^2 - bxy + y^2 = 1$$

$$\begin{cases} x = \alpha_b(n+1) \\ y = \alpha_b(n) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha_b(n-1) \\ y = \alpha_b(n) \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

Лемма. *Если* $x^2 - bxy + y^2 = 1$, *то найдется число* n *такое, что*

$$\begin{cases} x = \alpha_b(n+1) \\ y = \alpha_b(n) \end{cases} \qquad \text{или же} \qquad \begin{cases} x = \alpha_b(n) \\ y = \alpha_b(n+1) \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

Лемма. *Если* $x^2 - bxy + y^2 = 1$, *то найдется число* n *такое, что*

$$\begin{cases} x = \alpha_b(n+1) \\ y = \alpha_b(n) \end{cases} \qquad \text{\textit{или же}} \qquad \begin{cases} x = \alpha_b(n) \\ y = \alpha_b(n+1) \end{cases}$$

Лемма. *Если* $x^2 - bxy + y^2 = 1$ *и* $y \le x$, *то найдется число* n *такое, что* $x = \alpha_b(n+1)$, $y = \alpha_b(n)$.

Свойства делимости

Лемма.

$$\alpha_b^2(k) \mid \alpha_b(m) \Leftrightarrow k\alpha_b(k) \mid m$$

Свойства делимости

Лемма.

$$\alpha_b^2(k) \mid \alpha_b(m) \Leftrightarrow k\alpha_b(k) \mid m$$

Сравнение последовательностей

$$\alpha_{b'}(0) = 0 \quad \alpha_{b'}(1) = 1 \quad \alpha_{b'}(n+2) = b'\alpha_{b'}(n+1) - \alpha_{b'}(n)$$
$$\alpha_{b''}(0) = 0 \quad \alpha_{b''}(1) = 1 \quad \alpha_{b''}(n+2) = b''\alpha_{b''}(n+1) - \alpha_{b''}(n)$$

$$b'' \equiv b' \pmod{b' - b''}$$

Сравнение последовательностей

$$\alpha_{b'}(0) = 0 \quad \alpha_{b'}(1) = 1 \quad \alpha_{b'}(n+2) = b'\alpha_{b'}(n+1) - \alpha_{b'}(n)$$
$$\alpha_{b''}(0) = 0 \quad \alpha_{b''}(1) = 1 \quad \alpha_{b''}(n+2) = b''\alpha_{b''}(n+1) - \alpha_{b''}(n)$$

$$b'' \equiv b' \pmod{b' - b''}$$

$$\alpha_{b''}(n) \equiv \alpha_{b'}(n) \pmod{b' - b''}$$

Функции rem и arem

$$z = \mathrm{rem}(y, x) \iff y \equiv z \pmod{x} \& z \leq x - 1$$

Функции rem и arem

$$z = \mathrm{rem}(y, x) \iff y \equiv z \pmod{x} \& z \leq x - 1$$

$$z = \mathrm{arem}(y, x) \iff \big(y \equiv z \pmod{x} \text{ or } y \equiv -z \pmod{x}\big) \& 2z \leq x$$

Сравнение последовательностей

$$b'' \equiv b' \pmod{b' - b''}$$

Сравнение последовательностей

$$b'' \equiv b' \pmod{b' - b''}$$

$$\alpha_{b''}(n) \equiv \alpha_{b'}(n) \pmod{b' - b''}$$

Сравнение последовательностей

$$b'' \equiv b' \pmod{b' - b''}$$

$$\alpha_{b''}(n) \equiv \alpha_{b'}(n) \pmod{b' - b''}$$

Сравнение последовательностей

$$b'' \equiv b' \pmod{b' - b''}$$

$$\alpha_{b''}(n) \equiv \alpha_{b'}(n) \pmod{b' - b''}$$

$$\mathrm{rem}(\alpha_{b''}(n), b' - b'') = \mathrm{rem}(\alpha_{b'}(n), b' - b'')$$

Сравнение последовательностей

$$b'' \equiv b' \pmod{b' - b''}$$

$$\alpha_{b''}(n) \equiv \alpha_{b'}(n) \pmod{b' - b''}$$

$$\mathrm{rem}(\alpha_{b''}(n), b' - b'') = \mathrm{rem}(\alpha_{b'}(n), b' - b'')$$

Сравнение последовательностей

$$b'' \equiv b' \pmod{b' - b''}$$

$$\alpha_{b''}(n) \equiv \alpha_{b'}(n) \pmod{b' - b''}$$

$$\mathrm{rem}(\alpha_{b''}(n), b' - b'') = \mathrm{rem}(\alpha_{b'}(n), b' - b'')$$

$$\alpha_{b''}(n) = \mathrm{rem}(\alpha_{b'}(n), b' - b'') \quad \text{provided} \quad \alpha_{b''}(n) < b' - b''$$

$$\alpha_{b''}(n) = \mathrm{arem}(\alpha_{b'}(n), b' - b'') \quad \text{provided} \quad 2\alpha_{b''}(n) < b' - b''$$

Основная лемма. *Для любого числа b, такого что $b \geq 4$, и любых чисел x и k, равенство $x = \alpha_b(k)$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют числа B, r, s, t, u, v, X, Y такие, что*

$$u^2 - but + t^2 = 1,$$
$$s^2 - bsr + r^2 = 1,$$
$$r < s,$$
$$u^2 \mid s,$$
$$v = bs - 2r,$$
$$v \mid B - b,$$
$$u \mid B - 2,$$
$$B \geq 4,$$
$$X^2 - BXY + Y^2 = 1,$$
$$2x < u,$$
$$x = \mathrm{arem}(X, v),$$
$$k = \mathrm{arem}(X, u).$$

Часть "тогда"

Если $b \geq 4$ *и числа* $x, k, B, r, s, t, u, v, X, Y$ *удовлетворяют условиям*

$$u^2 - but + t^2 = 1,$$

$$s^2 - bsr + r^2 = 1,$$

$$r < s, \qquad v = bs - 2r,$$

$$u^2 \mid s,$$

$$B \geq 4, \qquad X^2 - BXY + Y^2 = 1,$$

$$v \mid B - b,$$

$$u \mid B - 2,$$

$$2a < u,$$

$$x = \mathrm{arem}(X, v),$$

$$k = \mathrm{arem}(X, u).$$

то $x = \alpha_b(k)$.

Часть “тогда”

$$u^2 - but + t^2 = 1$$

Часть “тогда”

$$u^2 - but + t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \alpha_b(\ell)$$

Часть “тогда”

$$u^2 - but + t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \alpha_b(\ell)$$

$$s^2 - bsr + r^2 = 1, \quad r < s$$

Часть “тогда”

$$u^2 - but + t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \alpha_b(\ell)$$

$$s^2 - bsr + r^2 = 1, \quad r < s \quad \Rightarrow \quad s = \alpha_b(m), \quad r = \alpha_b(m-1)$$

Часть “тогда”

$$u^2 - but + t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \alpha_b(\ell)$$

$$s^2 - bsr + r^2 = 1, \quad r < s \quad \Rightarrow \quad s = \alpha_b(m), \quad r = \alpha_b(m-1)$$

$$v = bs - 2r$$

Часть “тогда”

$$u^2 - but + t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \alpha_b(\ell)$$

$$s^2 - bsr + r^2 = 1, \quad r < s \quad \Rightarrow \quad s = \alpha_b(m), \quad r = \alpha_b(m-1)$$

$$v = bs - 2r \quad \Rightarrow \quad v = b\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1)$$

Часть “тогда”

$$u^2 - but + t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \alpha_b(\ell)$$

$$s^2 - bsr + r^2 = 1, \quad r < s \quad \Rightarrow \quad s = \alpha_b(m), \quad r = \alpha_b(m-1)$$

$$\begin{aligned} v = bs - 2r \quad &\Rightarrow \quad v = b\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1) \\ &\Rightarrow \quad v = \alpha_b(m+1) - \alpha_b(m-1) \end{aligned}$$

Часть “тогда”

$$u^2 - but + t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \alpha_b(\ell)$$

$$s^2 - bsr + r^2 = 1, \quad r < s \quad \Rightarrow \quad s = \alpha_b(m), \quad r = \alpha_b(m-1)$$

$$\begin{aligned} v = bs - 2r \quad &\Rightarrow \quad v = b\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1) \\ &\Rightarrow \quad v = \alpha_b(m+1) - \alpha_b(m-1) \end{aligned}$$

$$u^2 \mid s$$

Часть "тогда"

$$u^2 - but + t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \alpha_b(\ell)$$

$$s^2 - bsr + r^2 = 1, \quad r < s \quad \Rightarrow \quad s = \alpha_b(m), \quad r = \alpha_b(m-1)$$

$$\begin{aligned} v = bs - 2r \quad &\Rightarrow \quad v = b\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1) \\ &\Rightarrow \quad v = \alpha_b(m+1) - \alpha_b(m-1) \end{aligned}$$

$$u^2 \mid s \quad \Rightarrow \quad (\alpha_b(\ell))^2 \mid \alpha_b(m)$$

Часть “тогда”

$$u^2 - but + t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad u = \alpha_b(\ell)$$

$$s^2 - bsr + r^2 = 1, \quad r < s \quad \Rightarrow \quad s = \alpha_b(m), \quad r = \alpha_b(m-1)$$

$$\begin{aligned} v = bs - 2r \quad &\Rightarrow \quad v = b\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1) \\ &\Rightarrow \quad v = \alpha_b(m+1) - \alpha_b(m-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^2 \mid s \quad &\Rightarrow \quad (\alpha_b(\ell))^2 \mid \alpha_b(m) \\ &\Rightarrow \quad u \mid m \end{aligned}$$

Часть “тогда”

$$B \geq 4 \& X^2 - BXY + Y^2 = 1$$

Часть “тогда”

$$B \geq 4 \& X^2 - BXY + Y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad X = \alpha_B(n)$$

Часть “тогда”

$$
\begin{aligned}
B \geq 4 \& X^2 - BXY + Y^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad X = \alpha_B(n) \\
&\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{B - b}
\end{aligned}
$$

Часть “тогда”

$$\begin{aligned} B \geq 4 \& X^2 - BXY + Y^2 = 1 &\Rightarrow X = \alpha_B(n) \\ &\Rightarrow X \equiv \alpha_b(n) \pmod{B - b} \\ v \mid B - v & \end{aligned}$$

Часть “тогда”

$$\begin{aligned}
B \geq 4 \& X^2 - BXY + Y^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad X = \alpha_B(n) \\
&\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{B - b} \\
v \mid B - v \quad &\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{v}
\end{aligned}$$

Часть "тогда"

$$\begin{aligned} B \geq 4 \,\&\, X^2 - BXY + Y^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad X = \alpha_B(n) \\ &\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{B - b} \\ v \mid B - v \quad &\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{v} \end{aligned}$$

Пусть $j = \mathrm{arem}(n, 2m)$, то есть

$$n = 2\ell m \pm j, \qquad j \leq m$$

Часть “тогда”

$$\begin{aligned} B \geq 4 \& X^2 - BXY + Y^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad X = \alpha_B(n) \\ &\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{B-b} \\ v \mid B - v \quad &\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{v} \end{aligned}$$

Пусть $j = \mathrm{arem}(n, 2m)$, то есть

$$n = 2\ell m \pm j, \qquad j \leq m$$

$$A_b(n)$$

Часть “тогда”

$$\begin{aligned} B \geq 4 \& X^2 - BXY + Y^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad X = \alpha_B(n) \\ &\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{B-b} \\ v \mid B - v \quad &\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{v} \end{aligned}$$

Пусть $j = \mathrm{arem}(n, 2m)$, то есть

$$n = 2\ell m \pm j, \qquad j \leq m$$

$$A_b(n) \quad = \quad \Psi_b^n$$

Часть “тогда”

$$\begin{aligned} B \geq 4 \& X^2 - BXY + Y^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad X = \alpha_B(n) \\ &\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{B-b} \\ v \mid B - v \quad &\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{v} \end{aligned}$$

Пусть $j = \mathrm{arem}(n, 2m)$, то есть

$$n = 2\ell m \pm j, \qquad j \leq m$$

$$\begin{aligned} A_b(n) &= \Psi_b^n \\ &= \Psi_b^{2\ell m \pm j} \end{aligned}$$

Часть "тогда"

$$\begin{aligned} B \geq 4 \& X^2 - BXY + Y^2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad X = \alpha_B(n) \\ &\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{B - b} \\ v \mid B - v \quad &\Rightarrow \quad X \equiv \alpha_b(n) \pmod{v} \end{aligned}$$

Пусть $j = \mathrm{arem}(n, 2m)$, то есть

$$n = 2\ell m \pm j, \qquad j \leq m$$

$$\begin{aligned} A_b(n) &= \Psi_b^n \\ &= \Psi_b^{2\ell m \pm j} \\ &= \left[[\Psi_b^m]^2 \right]^\ell \Psi_b^{\pm j} \end{aligned}$$

Часть “тогда”

$$\begin{aligned} B \geq 4 \& X^2 - BXY + Y^2 = 1 &\Rightarrow X = \alpha_B(n) \\ &\Rightarrow X \equiv \alpha_b(n) \pmod{B-b} \\ v \mid B - v &\Rightarrow X \equiv \alpha_b(n) \pmod{v} \end{aligned}$$

Пусть $j = \mathrm{arem}(n, 2m)$, то есть

$$n = 2\ell m \pm j, \qquad j \leq m$$

$$\begin{aligned} A_b(n) &= \Psi_b^n \\ &= \Psi_b^{2\ell m \pm j} \\ &= \left[[\Psi_b^m]^2\right]^\ell \Psi_b^{\pm j} \\ &= \left[[A_b(m)]^2\right]^\ell [A_b(j)]^{\pm 1} \end{aligned}$$

Часть “тогда”

$$A_b(n) \quad = \quad \left[[A_b(m)]^2\right]^{\ell}[A_b(j)]^{\pm 1}$$

Часть “тогда”

$$A_b(n) \quad = \quad \left[[A_b(m)]^2\right]^{\ell}[A_b(j)]^{\pm 1}$$

$$v =$$

Часть "тогда"

$$A_b(n) \quad = \quad \left[[A_b(m)]^2\right]^{\ell}[A_b(j)]^{\pm 1}$$

$$v = \qquad \alpha_b(m+1) - \alpha_b(m-1)$$

$$A_b(m) \quad = \quad \begin{pmatrix} \alpha_b(m+1) & -\alpha_b(m) \\ \alpha_b(m) & -\alpha_b(m-1) \end{pmatrix}$$

Часть “тогда”

$$A_b(n) \quad = \quad \left[[A_b(m)]^2\right]^{\ell}[A_b(j)]^{\pm 1}$$

$$v = \qquad \alpha_b(m+1) - \alpha_b(m-1)$$

$$\begin{aligned} A_b(m) \quad &= \quad \begin{pmatrix} \alpha_b(m+1) & -\alpha_b(m) \\ \alpha_b(m) & -\alpha_b(m-1) \end{pmatrix} \\ &\equiv \quad - \begin{pmatrix} -\alpha_b(m-1) & \alpha_b(m) \\ -\alpha_b(m) & \alpha_b(m+1) \end{pmatrix} \pmod{v} \end{aligned}$$

Часть “тогда”

$$A_b(n) \quad = \quad \left[[A_b(m)]^2\right]^{\ell}[A_b(j)]^{\pm 1}$$

$$v = \qquad \alpha_b(m+1) - \alpha_b(m-1)$$

$$\begin{aligned}
A_b(m) \quad &= \quad \begin{pmatrix} \alpha_b(m+1) & -\alpha_b(m) \\ \alpha_b(m) & -\alpha_b(m-1) \end{pmatrix} \\
&\equiv \quad -\begin{pmatrix} -\alpha_b(m-1) & \alpha_b(m) \\ -\alpha_b(m) & \alpha_b(m+1) \end{pmatrix} \pmod{v} \\
&= \quad -[A_b(m)]^{-1} \\
[A_b(m)]^2 \quad &\equiv \quad -E \pmod{v} \\
A_b(n) \quad &\equiv \quad \pm[A_b(j)]^{\pm 1} \pmod{v}
\end{aligned}$$

Часть “тогда”

$$A_b(n) \equiv \pm[A_b(j)]^{\pm 1} \pmod{v}$$

Часть "тогда"

$$A_b(n) \equiv \pm [A_b(j)]^{\pm 1} \pmod{v}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_b(n+1) & -\alpha_b(n) \\ \alpha_b(n) & -\alpha_b(n-1) \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} \alpha_b(j+1) & -\alpha_b(j) \\ \alpha_b(j) & -\alpha_b(j-1) \end{pmatrix}^{\pm 1} \pmod{v}$$

Часть “тогда”

$$A_b(n) \equiv \pm[A_b(j)]^{\pm 1} \pmod{v}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_b(n+1) & -\alpha_b(n) \\ \alpha_b(n) & -\alpha_b(n-1) \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} \alpha_b(j+1) & -\alpha_b(j) \\ \alpha_b(j) & -\alpha_b(j-1) \end{pmatrix}^{\pm 1} \pmod{v}$$

$$\alpha_b(n) \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

Часть "тогда"

$$A_b(n) \equiv \pm[A_b(j)]^{\pm 1} \pmod{v}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_b(n+1) & -\alpha_b(n) \\ \alpha_b(n) & -\alpha_b(n-1) \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} \alpha_b(j+1) & -\alpha_b(j) \\ \alpha_b(j) & -\alpha_b(j-1) \end{pmatrix}^{\pm 1} \pmod{v}$$

$$\alpha_b(n) \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

$$X \quad = \quad \alpha_B(n)$$

Часть "тогда"

$$A_b(n) \equiv \pm[A_b(j)]^{\pm 1} \pmod{v}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_b(n+1) & -\alpha_b(n) \\ \alpha_b(n) & -\alpha_b(n-1) \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} \alpha_b(j+1) & -\alpha_b(j) \\ \alpha_b(j) & -\alpha_b(j-1) \end{pmatrix}^{\pm 1} \pmod{v}$$

$$\alpha_b(n) \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

$$X \quad = \quad \alpha_B(n) \equiv \alpha_b(n) \pmod{B-b}$$

Часть “тогда”

$$A_b(n) \equiv \pm[A_b(j)]^{\pm 1} \pmod{v}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_b(n+1) & -\alpha_b(n) \\ \alpha_b(n) & -\alpha_b(n-1) \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} \alpha_b(j+1) & -\alpha_b(j) \\ \alpha_b(j) & -\alpha_b(j-1) \end{pmatrix}^{\pm 1} \pmod{v}$$

$$\alpha_b(n) \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

$$\begin{aligned} X &= \alpha_B(n) \equiv \alpha_b(n) \pmod{B-b} \\ &= \equiv \alpha_b(n) \pmod{v} \end{aligned}$$

Часть “тогда”

$$A_b(n) \equiv \pm[A_b(j)]^{\pm 1} \pmod{v}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_b(n+1) & -\alpha_b(n) \\ \alpha_b(n) & -\alpha_b(n-1) \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} \alpha_b(j+1) & -\alpha_b(j) \\ \alpha_b(j) & -\alpha_b(j-1) \end{pmatrix}^{\pm 1} \pmod{v}$$

$$\alpha_b(n) \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

$$\begin{aligned} X &= \alpha_B(n) \equiv \alpha_b(n) \pmod{B-b} \\ &= \equiv \alpha_b(n) \pmod{v} \\ &\quad \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v} \end{aligned}$$

Часть “тогда”

$$X \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

$2\alpha_b(j)$

Часть “тогда”

$$X \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

$2\alpha_b(j) \leq 2\alpha_b(m)$

Часть “тогда”

$$X \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

$$2\alpha_b(j) \leq 2\alpha_b(m) \leq (b-2)\alpha_b(m)$$

Часть “тогда”

$$X \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

$$2\alpha_b(j) \le 2\alpha_b(m) \le (b-2)\alpha_b(m) < b\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1)$$

Часть “тогда”

$$X \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

$$2\alpha_b(j) \leq 2\alpha_b(m) \leq (b-2)\alpha_b(m) < b\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1) = v$$

Часть “тогда”

$$X \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

$$2\alpha_b(j) \le 2\alpha_b(m) \le (b-2)\alpha_b(m) < b\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1) = v$$

$$\mathrm{arem}(X, v) = \alpha_b(j)$$

Часть “тогда”

$$X \equiv \pm\alpha_b(j) \pmod{v}$$

$$2\alpha_b(j) \leq 2\alpha_b(m) \leq (b-2)\alpha_b(m) < b\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1) = v$$

$$\mathrm{arem}(X, v) = \alpha_b(j) = x$$

Часть “тогда”

$$x = \alpha_b(j)$$

Часть “тогда”

$$x = \alpha_b(j)$$

$2j$

Часть “тогда”

$$x = \alpha_b(j)$$

$$2j \leq 2\alpha_b(j)$$

Часть “тогда”

$$x = \alpha_b(j)$$

$$2j \leq 2\alpha_b(j) = 2x$$

Часть “тогда”

$$x = \alpha_b(j)$$

$$2j \leq 2\alpha_b(j) = 2x < u$$

Часть “тогда”

$$x = \alpha_b(j)$$

$$2j \leq 2\alpha_b(j) = 2x < u$$

$$\pm j \quad \equiv \quad n \pmod{m}$$

Часть "тогда"

$$x = \alpha_b(j)$$

$$2j \leq 2\alpha_b(j) = 2x < u$$

$$\begin{aligned} \pm j &\equiv n \pmod{m} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \alpha_B(n) \\ &\equiv \alpha_2(n) \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

Часть "тогда"

$$x = \alpha_b(j)$$

$$2j \leq 2\alpha_b(j) = 2x < u$$

$$\begin{aligned} \pm j &\equiv n \pmod{m} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \alpha_B(n) \\ &\equiv \alpha_2(n) \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

$\pm j \equiv X \pmod{u}$

Часть "тогда"

$$x = \alpha_b(j)$$

$$2j \le 2\alpha_b(j) = 2x < u$$

$$\begin{aligned} \pm j &\equiv n \pmod{m} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \alpha_B(n) \\ &\equiv \alpha_2(n) \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

$$\pm j \equiv X \pmod{u} \qquad j = \mathrm{arem}(X, u)$$

Часть “тогда”

$$x = \alpha_b(j)$$

$$2j \le 2\alpha_b(j) = 2x < u$$

$$\begin{aligned} \pm j &\equiv n \pmod{m} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \alpha_B(n) \\ &\equiv \alpha_2(n) \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

$$\pm j \equiv X \pmod{u} \qquad j = \mathrm{arem}(X, u) = k$$

Часть "тогда"

$$x = \alpha_b(j)$$

$$2j \le 2\alpha_b(j) = 2x < u$$

$$\begin{aligned} \pm j &\equiv n \pmod{m} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \alpha_B(n) \\ &\equiv \alpha_2(n) \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

$$\pm j \equiv X \pmod{u} \qquad j = \mathrm{arem}(X, u) = k$$

Часть "тогда"

$$x = \alpha_b(j)$$

$$2j \le 2\alpha_b(j) = 2x < u$$

$$\begin{aligned} \pm j &\equiv n \pmod{m} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= \alpha_B(n) \\ &\equiv \alpha_2(n) \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{B-2} \\ &\equiv n \pmod{u} \end{aligned}$$

$$\pm j \equiv X \pmod{u} \qquad j = \mathrm{arem}(X, u) = k \qquad x = \alpha_b(k)$$

Часть "только тогда"

Если $b \geq 4$ *и if* $x = \alpha_b(k)$, *то найдутся числа* $x, k, B, r, s, t, u, v, X, Y$ *такие, что*

$$u^2 - but + t^2 = 1,$$

$$s^2 - bsr + r^2 = 1, \qquad r < s,$$

$$v = bs - 2r,$$

$$u^2 \mid s,$$

$$B \geq 4, \qquad X^2 - BXY + Y^2 = 1,$$

$$v \mid B - b,$$

$$u \mid B - 2,$$

$$2x < u,$$

$$x = \mathrm{arem}(X, v),$$

$$k = \mathrm{arem}(X, u).$$

Часть “только тогда”

$$u = \alpha_b(\ell), t = \alpha_b(\ell + 1) \quad \Rightarrow \quad u^2 - but + t^2 = 1$$

Часть “только тогда”

$$
\begin{aligned}
u = \alpha_b(\ell), t = \alpha_b(\ell+1) \quad &\Rightarrow \quad u^2 - but + t^2 = 1 \\
\ell \text{ велико} \quad &\Rightarrow \quad 2x < u
\end{aligned}
$$

Часть "только тогда"

$$\begin{aligned} u = \alpha_b(\ell), t = \alpha_b(\ell+1) &\Rightarrow u^2 - but + t^2 = 1 \\ \ell \text{ велико} &\Rightarrow 2x < u \\ & u \equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

Часть “только тогда”

$$\begin{aligned} u = \alpha_b(\ell), t = \alpha_b(\ell+1) &\Rightarrow u^2 - but + t^2 = 1 \\ \ell \text{ велико} &\Rightarrow 2x < u \\ & u \equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s = \alpha_b(m+1), \quad r = \alpha_b(m) &\Rightarrow s^2 - bsr + r^2 = 1 \\ &\Rightarrow r < s \end{aligned}$$

Часть “только тогда”

$$
\begin{aligned}
u = \alpha_b(\ell), t = \alpha_b(\ell+1) \quad &\Rightarrow \quad u^2 - but + t^2 = 1 \\
\ell \text{ велико} \quad &\Rightarrow \quad 2x < u \\
&\qquad\ \ u \equiv 1 \pmod 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s = \alpha_b(m+1), \quad r = \alpha_b(m) \quad &\Rightarrow \quad s^2 - bsr + r^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad r < s \\
m = \ell u \quad &\Rightarrow \quad u^2 \mid s
\end{aligned}
$$

Часть “только тогда”

$$
\begin{aligned}
u = \alpha_b(\ell), t = \alpha_b(\ell+1) \quad &\Rightarrow \quad u^2 - but + t^2 = 1 \\
\ell \text{ велико} \quad &\Rightarrow \quad 2x < u \\
& \quad\quad\; u \equiv 1 \pmod 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s = \alpha_b(m+1), \quad r = \alpha_b(m) \quad &\Rightarrow \quad s^2 - bsr + r^2 = 1 \\
&\Rightarrow \quad r < s \\
m = \ell u \quad &\Rightarrow \quad u^2 \mid s
\end{aligned}
$$

$$
v = \quad bs - 2r
$$

Часть “только тогда”

$$\begin{aligned} u = \alpha_b(\ell), t = \alpha_b(\ell+1) \quad &\Rightarrow \quad u^2 - but + t^2 = 1 \\ \ell \text{ велико} \quad &\Rightarrow \quad 2x < u \\ & \quad\quad\; u \equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s = \alpha_b(m+1), \quad r = \alpha_b(m) \quad &\Rightarrow \quad s^2 - bsr + r^2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad r < s \\ m = \ell u \quad &\Rightarrow \quad u^2 \mid s \end{aligned}$$

$$v = \quad bs - 2r \quad \geq 4\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1)$$

Часть "только тогда"

$$\begin{aligned} u = \alpha_b(\ell), t = \alpha_b(\ell+1) \quad &\Rightarrow \quad u^2 - but + t^2 = 1 \\ \ell \text{ велико} \quad &\Rightarrow \quad 2x < u \\ & \quad u \equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s = \alpha_b(m+1), \quad r = \alpha_b(m) \quad &\Rightarrow \quad s^2 - bsr + r^2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad r < s \\ m = \ell u \quad &\Rightarrow \quad u^2 \mid s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = \quad bs - 2r \quad &\geq 4\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1) \\ &> 2\alpha_b(m) \geq 0 \end{aligned}$$

Часть “только тогда”

$$B \geq 4, \quad v \mid B - b, \quad u \mid B - 2$$

$$B \equiv b \pmod{v}, \quad B \equiv 2 \pmod{u}$$

Часть “только тогда”

$$B \geq 4, \quad v \mid B - b, \quad u \mid B - 2$$

$$B \equiv b \pmod{v}, \quad B \equiv 2 \pmod{u}$$

$$d \mid u$$

$$d \mid v$$

Часть “только тогда”

$$B \geq 4, \quad v \mid B - b, \quad u \mid B - 2$$

$$B \equiv b \pmod{v}, \quad B \equiv 2 \pmod{u}$$

$$\begin{aligned} d &\mid u \\ d &\mid v \\ u^2 \mid s \quad \Rightarrow \quad d &\mid s \end{aligned}$$

Часть "только тогда"

$$B \geq 4, \quad v \mid B - b, \quad u \mid B - 2$$

$$B \equiv b \pmod{v}, \quad B \equiv 2 \pmod{u}$$

$$\begin{aligned} & & d &\mid u \\ & & d &\mid v \\ u^2 \mid s &\quad\Rightarrow & d &\mid s \\ v = bs - 2r &\quad\Rightarrow & d &\mid 2r \end{aligned}$$

Часть “только тогда”

$$B \geq 4, \quad v \mid B - b, \quad u \mid B - 2$$

$$B \equiv b \pmod{v}, \quad B \equiv 2 \pmod{u}$$

$$\begin{aligned} & & d &\mid u \\ & & d &\mid v \\ u^2 \mid s &\quad\Rightarrow & d &\mid s \\ v = bs - 2r &\quad\Rightarrow & d &\mid 2r \\ u \equiv 1 \pmod{2} &\quad\Rightarrow & d &\mid r \end{aligned}$$

Часть "только тогда"

$$B \geq 4, \quad v \mid B - b, \quad u \mid B - 2$$

$$B \equiv b \pmod{v}, \quad B \equiv 2 \pmod{u}$$

$$\begin{aligned} && d &\mid u \\ && d &\mid v \\ u^2 \mid s &\quad\Rightarrow & d &\mid s \\ v = bs - 2r &\quad\Rightarrow & d &\mid 2r \\ u \equiv 1 \pmod{2} &\quad\Rightarrow & d &\mid r \\ s^2 - bsr + r^2 = 1 &\quad\Rightarrow & d &\mid 1 \end{aligned}$$

Часть "только тогда"

$$B \geq 4, \quad v \mid B - b, \quad u \mid B - 2$$

$$B \equiv b \pmod{v}, \quad B \equiv 2 \pmod{u}$$

$$\begin{aligned} && d &\mid u \\ && d &\mid v \\ u^2 \mid s &\Rightarrow & d &\mid s \\ v = bs - 2r &\Rightarrow & d &\mid 2r \\ u \equiv 1 \pmod{2} &\Rightarrow & d &\mid r \\ s^2 - bsr + r^2 = 1 &\Rightarrow & d &\mid 1 \\ &\Rightarrow & d &= 1 \end{aligned}$$

Часть “только тогда”

$$X = \alpha_B(k), Y = \alpha_B(k+1) \quad \Rightarrow \quad X^2 - BXY + Y^2 = 1$$

Часть “только тогда”

$$X = \alpha_B(k), Y = \alpha_B(k+1)$$

$$x = \mathrm{arem}(X, v)$$

Часть “только тогда”

$$X = \alpha_B(k), Y = \alpha_B(k+1)$$

$$x = \mathrm{arem}(X, v)$$

$$\begin{aligned} \alpha_B(k) &\equiv \alpha_b(k) \pmod{B-b} \\ X &\equiv x \pmod{B-b} \\ v \mid B-b \Rightarrow X &\equiv x \pmod{v} \end{aligned}$$

Часть "только тогда"

$$X = \alpha_B(k),\, Y = \alpha_B(k+1)$$

$$x = \mathrm{arem}(X, v)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_B(k) &\equiv \alpha_b(k) \pmod{B-b} \\
X &\equiv x \pmod{B-b} \\
v \mid B-b \Rightarrow X &\equiv x \pmod{v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = \quad bs - 2r \quad &\geq 4\alpha_b(m) - 2\alpha_b(m-1) \\
&> \alpha_b(m) = \alpha_b(\ell u) \\
&\geq \alpha_b(\ell) = u > 2x
\end{aligned}$$

Часть “только тогда”

$$X = \alpha_B(k), Y = \alpha_B(k+1)$$

$$k = \mathrm{arem}(X, u)$$

Часть “только тогда”

$$X = \alpha_B(k), Y = \alpha_B(k+1)$$

$$k = \mathrm{arem}(X, u)$$

$$\begin{aligned} \alpha_B(k) &\equiv \alpha_2(k) \pmod{B-2} \\ X &\equiv k \pmod{B-2} \\ u \mid B-2 \Rightarrow \qquad X &\equiv k \pmod{u} \end{aligned}$$

$$2k \leq 2x < u$$

Диофантова альтернатива

$$D(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

- либо
$$\exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\}$$

Вещественные неизвестные

$$D(\chi_1, \ldots, \chi_m) \quad = \quad 0$$

Вещественные неизвестные

$$\begin{aligned} D(\chi_1, \ldots, \chi_m) &= 0 \\ \sin(\pi\chi_1) &= 0 \\ &\vdots \\ \sin(\pi\chi_m) &= 0 \end{aligned}$$

Вещественные неизвестные

$$\begin{aligned}
D(\chi_1, \ldots, \chi_m) &= 0 \\
\sin(\pi\chi_1) &= 0 \\
&\vdots \\
\sin(\pi\chi_m) &= 0
\end{aligned}$$

$\pi = 3.14159...$

Вещественные неизвестные

$$\begin{aligned} D(\chi_1, \ldots, \chi_m) &= 0 \\ \sin(\pi\chi_1) &= 0 \\ &\vdots \\ \sin(\pi\chi_m) &= 0 \end{aligned}$$

$$\pi = 3.14159...$$

$$D^2(\chi_1, \ldots, \chi_m) + \sin^2(\pi\chi_1) + \cdots + \sin^2(\pi\chi_m) = 0$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_0$ обозначает класс функций многих вещественных переменных, которые могут быть заданы выражениями, построены из переменных, конкретных натуральных чисел и числа π при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции sin *в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции $\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m)$ из класса $\mathcal{F}_0$ распознавал, имеет ли уравнение*

$$\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0$$

решение в вещественных числах.

Только натуральные коэффициенты

$$\mathsf{sin}(\psi) = 0$$

Только натуральные коэффициенты

$$\sin(\psi) = 0 \qquad 2 \leq \psi \leq 4$$

Только натуральные коэффициенты

$$\sin(\psi) = 0 \qquad 2 \leq \psi \leq 4$$

$$\begin{aligned}
&D^2(\chi_1, \ldots, \chi_m) + \\
&\quad \sin^2(\psi\chi_1) + \cdots + \sin^2(\psi\chi_m) + \\
&\qquad \sin^2(\psi) + (1 - (\psi - 3)^2 - \zeta^2)^2 = 0
\end{aligned}$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_1$ обозначает класс функций многих вещественных переменных, которые могут быть заданы выражениями, построены из переменных, конкретных натуральных чисел при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции sin *в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции* $\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ *из класса* $\mathcal{F}_1$ *распознавал, имеет ли уравнение*

$$\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m) = 0$$

решение в вещественных числах.

Альтернативы

$$D(x_1, \ldots, x_m)$$

- либо
$$\exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\}$$

Альтернативы

$$D(x_1, \ldots, x_m)$$

- либо
$$\exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\}$$

$$\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m)$$

- либо
$$\exists \chi_1 \ldots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall \chi_1 \ldots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m) \neq 0\}$$

Альтернативы

- либо
$$\exists x_1 \dots x_m \{2D^2(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \dots x_m \{2D^2(x_1, \dots, x_m) > 1\}$$

Альтернативы

- либо
$$\exists x_1 \dots x_m \{2D^2(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \dots x_m \{2D^2(x_1, \dots, x_m) > 1\}$$
- либо
$$\exists \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) > 1\}$$

Альтернативы

- либо
$$\exists x_1 \dots x_m \{2D^2(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \dots x_m \{2D^2(x_1, \dots, x_m) > 1\}$$
- либо
$$\exists \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) > 1\}$$

$$\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = (B^2(\chi_1, \dots, \chi_m) + 1)(D^2(\chi_1, \dots, \chi_m) + \sin^2(\pi\chi_1) + \dots + \sin^2(\pi\chi_m))$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_0$ *по-прежнему обозначает класс функций многих вещественных переменных, которые могут быть заданы выражениями, построены из переменных, конкретных натуральных чисел и числа* π *при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции* sin *в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции* $\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ *из класса* $\mathcal{F}_0$ *распознавал, имеет ли неравенство*

$$\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m) < 1$$

решение в вещественных числах.

Случай одной переменной

$$\chi \mapsto \langle \chi \sin(\chi), \chi \sin(\chi^3), \ldots, \chi \sin(\chi^{2m-1}) \rangle$$

Случай одной переменной

$$\chi \mapsto \langle \chi \sin(\chi), \chi \sin(\chi^3), \ldots, \chi \sin(\chi^{2m-1}) \rangle$$

$$\Psi(\chi) = \Phi(\chi \sin(\chi), \chi \sin(\chi^3), \ldots, \chi \sin(\chi^{2m-1}),$$

Случай одной переменной

$$\chi \mapsto \langle \chi \sin(\chi), \chi \sin(\chi^3), \ldots, \chi \sin(\chi^{2m-1}) \rangle$$

$$\Psi(\chi) = \Phi(\chi \sin(\chi), \chi \sin(\chi^3), \ldots, \chi \sin(\chi^{2m-1}),$$

- либо
$$\exists \chi_1 \ldots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall \chi_1 \ldots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m) > 1\}$$

Случай одной переменной

$$\chi \mapsto \langle \chi \sin(\chi), \chi \sin(\chi^3), \ldots, \chi \sin(\chi^{2m-1}) \rangle$$

$$\Psi(\chi) = \Phi(\chi \sin(\chi), \chi \sin(\chi^3), \ldots, \chi \sin(\chi^{2m-1}),$$

- либо
$$\exists \chi_1 \ldots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall \chi_1 \ldots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m) > 1\}$$
- либо
$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \chi \{\Psi(\chi) < \epsilon\}$$
- либо
$$\forall \chi \{\Psi(\chi) \geq 1\}$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_0^1$ *обозначает класс функций одной вещественной переменной, которые могут быть заданы выражениями, построены из переменной, конкретных натуральных чисел и числа* π *при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции* sin *в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции* $\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ *из класса* $\mathcal{F}_0^1$ *распознавал, имеет ли неравенство*

$$\Phi(\chi) < 1$$

решение в вещественных числах.

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_0^1$ *обозначает класс функций одной вещественной переменной, которые могут быть заданы выражениями, построены из переменной, конкретных натуральных чисел и числа* π *при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции* sin *в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции* $\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ *из класса* $\mathcal{F}_0^1$ *распознавал, имеет ли уравнение*

$$2\Phi(\chi) = 1$$

решение в вещественных числах.

Тождества

- либо

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \chi \{ \Psi(\chi) < \epsilon \}$$

- либо

$$\forall \chi \{ \Psi(\chi) \geq 1 \}$$

Тождества

- либо

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \chi \{ \Psi(\chi) < \epsilon \}$$

- либо

$$\forall \chi \{ \Psi(\chi) \geq 1 \}$$

- либо

$$\exists \chi \{ 1 - \Psi(\chi) + |1 - \Psi(\chi)| \neq 0 \}$$

- либо

$$\forall \chi \{ 1 - \Psi(\chi) + |1 - \Psi(\chi)| = 0 \}$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_2^1$ *обозначает класс функций одной вещественной переменной, которые могут быть заданы выражениями, построены из переменной, конкретных натуральных чисел и числа* π *при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функций* sin *и* $|\ |$ *(абсолютная величина) в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции* $\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ *из класса* $\mathcal{F}_2^1$ *распознавал, справедливо ли равенство*

$$2\Phi(\chi) = 1$$

при всех вещественных значениях χ*.*

Снова полиномиальные уравнения

$\tau \in [0, 1]$

$$\Upsilon'(\tau) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$\tau \in [0, 1]$

$$\Upsilon'(\tau) = 0$$

$$\Pi'(\tau) = 0, \qquad \Xi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Xi(\tau) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$\tau \in [0, 1]$

$$\Upsilon'(\tau) = 0$$

$$\Pi'(\tau) = 0, \qquad \Xi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Xi(\tau) = 0$$

$$3 \leq \Pi(0) \leq 4$$

Снова полиномиальные уравнения

$\tau \in [0, 1]$

$$\Upsilon'(\tau) = 0$$

$$\Pi'(\tau) = 0, \qquad \Xi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Xi(\tau) = 0$$

$$3 \leq \Pi(0) \leq 4$$

$$\Xi(0) = 0 \qquad \Xi(1) = 0 \qquad \Xi'(0) = 1$$

Снова полиномиальные уравнения

$\tau \in [0, 1]$

$$\Upsilon'(\tau) = 0$$

$$\Pi'(\tau) = 0, \qquad \Xi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Xi(\tau) = 0$$

$$3 \leq \Pi(0) \leq 4$$

$$\Xi(0) = 0 \qquad \Xi(1) = 0 \qquad \Xi'(0) = 1$$

$$\Pi(\tau) = \pi$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Upsilon'(\tau) = 0,$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Upsilon'(\tau) = 0, \qquad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Upsilon'(\tau) = 0, \qquad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(0) = \Psi(1) = 0, \qquad \Psi'(0) = \Pi(0)\Upsilon(0),$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Upsilon'(\tau) = 0, \qquad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(0) = \Psi(1) = 0, \qquad \Psi'(0) = \Pi(0)\Upsilon(0),$$

$\Upsilon(\tau)$ является константой – каким-то целым числом y

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{gathered}
\Pi'(\tau) = 0, \qquad \Xi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Xi(\tau) = 0, \\
\Upsilon_1'(\tau) = 0, \qquad \Psi_1''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_1^2(\tau)\Psi_1(\tau) = 0, \\
\vdots \\
\Upsilon_m'(\tau) = 0, \qquad \Psi_m''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_m^2(\tau)\Psi_m(\tau) = 0, \\
D\big(\Upsilon_1(\tau), \dots, \Upsilon_m(\tau)\big) = 0
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
3 \le \Pi(0) \le 4, \\
\Xi(0) = \Xi(1) = 0, \qquad \Xi'(0) = 1, \\
\Psi_1(0) = \Psi_1(1) = 0, \qquad \Psi_1'(0) = \Pi(0)\Upsilon_1(0), \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\Psi_m(0) = \Psi_m(1) = 0, \qquad \Psi_m'(0) = \Pi(0)\Upsilon_m(0).
\end{gathered}$$

Снова полиномиальные уравнения

$$3 \le \Pi(0) \le 4 \iff 3 + \Delta_1^2(0) = \Pi(0)\,\& \qquad \Pi(0) + \Delta_2^2(0) = 4$$

$$\Delta(\alpha) = \beta \iff \Delta(\tau) - \beta = (\tau - \alpha)\Omega(\tau)$$

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольной системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} P_1\big(\tau, \Xi_1(\tau), \ldots, \Xi_k(\tau), \Xi_1'(\tau)\big) &= 0 \\ &\vdots \\ P_k\big(\tau, \Xi_1(\tau), \ldots, \Xi_k(\tau), \Xi_k'(\tau)\big) &= 0, \end{aligned}$$

где P_1, *...*, P_k *– многочлены с целыми коэффициентами, узнавать, имеет ли эта система решение на интервале* $[0, 1]$.

Следствие (трудное) DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по дифференциальному уравнению вида

$$P_1\big(\tau, \Xi(\tau), \Xi'(\tau), \ldots, \Xi^{\langle n \rangle}(\tau)\big) \quad = 0$$

где P – многочлен с целыми коэффициентами, узнавать, имеет ли это уравнение решение на интервале $[0, 1]$.

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) \;\; = \;\; \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) \;\; = \;\; \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

$$\Psi'(\tau) = 0, \qquad \tau\Phi'(\tau) = \Psi(\tau)\Phi(\tau)$$

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

$$\Psi'(\tau) = 0, \qquad \tau\Phi'(\tau) = \Psi(\tau)\Phi(\tau)$$

$$\tau\Phi'(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} k\phi_k\tau^k = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_0\phi_k\tau^k$$

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

$$\Psi'(\tau) = 0, \qquad \tau\Phi'(\tau) = \Psi(\tau)\Phi(\tau)$$

$$\tau\Phi'(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} k\phi_k\tau^k = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_0\phi_k\tau^k$$

$$k\phi_k = \psi_0\phi_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

$$\Psi'(\tau) = 0, \qquad \tau\Phi'(\tau) = \Psi(\tau)\Phi(\tau)$$

$$\tau\Phi'(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} k\phi_k\tau^k = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_0\phi_k\tau^k$$

$$k\phi_k = \psi_0\phi_k \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вырожденное решение: $\psi_1 = \psi_2 = \cdots = 0$,
$\phi_0 = \phi_1 = \cdots = 0$

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

$$\Psi'(\tau) = 0, \qquad \tau\Phi'(\tau) = \Psi(\tau)\Phi(\tau)$$

$$\tau\Phi'(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} k\phi_k \tau^k = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_0 \phi_k \tau^k$$

$$k\phi_k = \psi_0\phi_k \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вырожденное решение: $\psi_1 = \psi_2 = \cdots = 0$,
$\phi_0 = \phi_1 = \cdots = 0$
Невырожденное решение: $\qquad \psi_0 = y, \qquad \psi_1 = \psi_2 = \cdots = 0,$

$$\phi_0 = \cdots = \phi_{y-1} = \phi_{y+1} = \cdots = 0$$

Формальные степенные ряды

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(\tau) &= 0, \\
\tau\Phi_1'(\tau) &= \Psi_1(\tau)\Phi_1(\tau), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Формальные степенные ряды

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(\tau) &= 0, \\
\tau\Phi_1'(\tau) &= \Psi_1(\tau)\Phi_1(\tau), \\
&\vdots \\
\Psi_m'(\tau) &= 0, \\
\tau\Phi_m'(\tau) &= \Psi_m(\tau)\Phi_1(\tau),
\end{aligned}$$

Формальные степенные ряды

$$\begin{aligned}
\Psi_1'(\tau) &= 0, \\
\tau\Phi_1'(\tau) &= \Psi_1(\tau)\Phi_1(\tau), \\
&\vdots \\
\Psi_m'(\tau) &= 0, \\
\tau\Phi_m'(\tau) &= \Psi_m(\tau)\Phi_1(\tau), \\
D(\Psi_1(\tau), \ldots, \Psi_m(\tau)) &= 0
\end{aligned}$$

Формальные степенные ряды

$$
\begin{aligned}
\Psi_1'(\tau) &= 0, \\
\tau\Phi_1'(\tau) &= \Psi_1(\tau)\Phi_1(\tau), \\
&\vdots \\
\Psi_m'(\tau) &= 0, \\
\tau\Phi_m'(\tau) &= \Psi_m(\tau)\Phi_1(\tau), \\
D(\Psi_1(\tau), \ldots, \Psi_m(\tau)) &= 0
\end{aligned}
$$

$$\Phi_1(\tau) \ldots \Phi_m(\tau) \not\equiv 0$$

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольной системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} P_1\big(\tau, \Xi_1(\tau), \ldots, \Xi_k(\tau), \Xi_1'(\tau)\big) &= 0, \\ &\vdots \\ P_k\big(\tau, \Xi_1(\tau), \ldots, \Xi_k(\tau), \Xi_k'(\tau)\big) &= 0, \end{aligned}$$

где P_m *– многочлены с целыми коэффициентами узнавать, имеет ли эта система решение в виде формального степенного ряда, удовлетворяющего также условию*

$$\Xi_1(\tau) \not\equiv 0.$$

Сходящиеся степенные ряды

Сходящиеся степенные ряды

$$\Psi'(\tau) = 0,$$
$$\tau^2\Phi'(\tau) - (\Psi(\tau)\tau + 1)\Phi(\tau) + 1 = 0$$

Сходящиеся степенные ряды

$$\Psi'(\tau) = 0,$$
$$\tau^2\Phi'(\tau) - (\Psi(\tau)\tau + 1)\Phi(\tau) + 1 = 0$$

$$-\phi_0 + 1 = 0$$

Сходящиеся степенные ряды

$$\Psi'(\tau) = 0,$$
$$\tau^2\Phi'(\tau) - (\Psi(\tau)\tau + 1)\Phi(\tau) + 1 = 0$$

$$-\phi_0 + 1 = 0$$

$$-\psi_0\phi_0 - \psi_1 = 0$$

Сходящиеся степенные ряды

$$\Psi'(\tau) = 0,$$
$$\tau^2\Phi'(\tau) - (\Psi(\tau)\tau + 1)\Phi(\tau) + 1 = 0$$

$$-\phi_0 + 1 = 0$$

$$-\psi_0\phi_0 - \psi_1 = 0$$

$$\phi_{k-2} - \psi_0\phi_{k-1} - \psi_k = 0, \quad k > 2$$

Сходящиеся степенные ряды

$$\Psi'(\tau) = 0,$$
$$\tau^2\Phi'(\tau) - (\Psi(\tau)\tau + 1)\Phi(\tau) + 1 = 0$$

$$-\phi_0 + 1 = 0$$

$$-\psi_0\phi_0 - \psi_1 = 0$$

$$\phi_{k-2} - \psi_0\phi_{k-1} - \psi_k = 0, \quad k > 2$$

$$\psi_0 = 1, \ldots, \psi_n = -\psi_0(1-\phi_0)(2-\phi_0)\ldots(n-\phi_0), \ldots.$$

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольной системе дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
P_1\big(\tau, \Xi_1(\tau), \dots, \Xi_k(\tau), \Xi_1'(\tau)\big) &= 0,\\
&\vdots\\
P_k\big(\tau, \Xi_1(\tau), \dots, \Xi_k(\tau), \Xi_k'(\tau)\big) &= 0,
\end{aligned}
$$

где P_m – многочлены с целыми коэффициентами узнавать, имеет ли эта система решение в виде сходящихся степенных рядов

Уравнения в частных производных

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \ldots, y_m) = 0$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \ldots, y_m) = 0$$

$$\Psi(\tau_1, \ldots, \tau_m) = \sum_{y_1, \ldots, y_m = 0}^{\infty} \psi_{y_1, \ldots, y_m} \tau_1^{y_1} \ldots \tau_m^{y_m}$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \ldots, y_m) = 0$$

$$\Psi(\tau_1, \ldots, \tau_m) = \sum_{y_1, \ldots, y_m = 0}^{\infty} \psi_{y_1, \ldots, y_m} \tau_1^{y_1} \ldots \tau_m^{y_m}$$

$$\left(\tau_k \frac{\partial}{\partial \tau_k} \right) \tau_k^{y_k} = y_k \tau_k^{y_k}$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \ldots, y_m) = 0$$

$$\Psi(\tau_1, \ldots, \tau_m) = \sum_{y_1, \ldots, y_m = 0}^{\infty} \psi_{y_1, \ldots, y_m} \tau_1^{y_1} \ldots \tau_m^{y_m}$$

$$\left(\tau_k \frac{\partial}{\partial \tau_k}\right) \tau_k^{y_k} = y_k \tau_k^{y_k}$$

$$D\left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \ldots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \ldots, \tau_m) =$$

$$= \textstyle\sum_{y_1, \ldots, y_m = 0}^{\infty} D(y_1, \ldots, y_m) \psi_{y_1, \ldots, y_m} \tau_1^{y_1} \ldots \tau_m^{y_m}$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=\sum_{y_1,\ldots,y_m=0}^{\infty}\tau_1^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m} \qquad (*)$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=\sum_{y_1,\ldots,y_m=0}^{\infty}\tau_1^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m} \qquad (*)$$

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=$$
$$=\textstyle\sum_{y_1,\ldots,y_m=0}^{\infty} D(y_1,\ldots,y_m)\psi_{y_1,\ldots,y_m}\tau_1^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m}$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=\sum_{y_1,\ldots,y_m=0}^{\infty}\tau_1^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m}\qquad(*)$$

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=$$
$$=\textstyle\sum_{y_1,\ldots,y_m=0}^{\infty}D(y_1,\ldots,y_m)\psi_{y_1,\ldots,y_m}\tau_1^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m}$$

$$\psi_{y_1,\ldots,y_m}=\frac{1}{D(y_1,\ldots,y_m)}$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\dots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\dots,\tau_m)=\sum_{y_1,\dots,y_m=0}^{\infty}\tau_1^{y_1}\dots\tau_m^{y_m} \qquad (*)$$

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\dots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\dots,\tau_m)=$$
$$=\textstyle\sum_{y_1,\dots,y_m=0}^{\infty} D(y_1,\dots,y_m)\psi_{y_1,\dots,y_m}\tau_1^{y_1}\dots\tau_m^{y_m}$$

$$\psi_{y_1,\dots,y_m}=\frac{1}{D(y_1,\dots,y_m)}$$

Дифференциальное уравнение (*) имеет решение в том и только том случае, когда диофантово уравнение $D(y_1,\dots,y_m)=0$ решений не имеет

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=\sum_{y_1,\ldots,y_m=0}^{\infty}\tau_1^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m}\qquad(*)$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\dots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\dots,\tau_m)=\sum_{y_1,\dots,y_m=0}^{\infty}\tau_1^{y_1}\dots\tau_m^{y_m}\qquad(*)$$

$$(1-\tau_1)\dots(1-\tau_m)D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\dots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\dots,\tau_m)=1\qquad(**)$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=\sum_{y_1,\ldots,y_m=0}^{\infty}\tau_1^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m}\qquad(*)$$

$$(1-\tau_1)\ldots(1-\tau_m)D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=1\qquad(**)$$

Дифференциальные уравнения (*) и (**) имеют решения в том и только том случае, когда диофантово уравнение $D(y_1,\ldots,y_m)=0$ решений не имеет

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольному многочлену Q с целыми коэффициентами узнавать, имеет ли дифференциальное уравнение в частных производных

$$Q\left(\tau_1, \ldots, \tau_m, \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \ldots, \tau_m) = 1$$

решение в виде формального степенного ряда.

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_2 \dots x_m \{D(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_2 \ldots x_m \{D(a, x_2, \ldots, x_m) = 0\}$$

$$(1-\tau_2)\ldots(1-\tau_m)\,D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1}, \tau_2\frac{\partial}{\partial\tau_2}, \ldots, \tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) =$$

$$= \Phi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m),$$

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_2 \dots x_m \{D(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

$$(1-\tau_2)\dots(1-\tau_m)\, D\left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \\ = \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \frac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$$

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_2 \dots x_m \{ D(a, x_2, \dots, x_m) = 0 \}$$

$$(1-\tau_2)\dots(1-\tau_m)\, D\left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \\ = \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \frac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$$

$$\Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \tau_1^k$$

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_2 \ldots x_m \{D(a, x_2, \ldots, x_m) = 0\}$$

$$(1-\tau_2)\ldots(1-\tau_m)\, D\left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}, \ldots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \\ = \Phi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \cdots = \frac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = 0$$

$$\Phi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \tau_1^k$$

$$D\left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \ldots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \ldots, \tau_m) = \frac{\Phi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)}{(1-\tau_2)\ldots(1-\tau_m)}$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\dots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\dots,\tau_m) =$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=$$

$$=\quad\frac{\Phi(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)}{(1-\tau_2)\ldots(1-\tau_m)}$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=$$

$$=\quad\frac{\Phi(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)}{(1-\tau_2)\ldots(1-\tau_m)}$$

$$=\quad\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k\tau_1^k\sum_{y_2,\ldots,y_m}\tau_2^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m}$$

Уравнения в частных производных

$$
\begin{aligned}
D\left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \\
= \quad & \frac{\Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)}{(1-\tau_2)\dots(1-\tau_m)} \\
= \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \tau_1^k \sum_{y_2, \dots, y_m} \tau_2^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \\
= \quad & \sum_{y_1, \dots, y_m = 0}^{\infty} D(y_1, \dots, y_m) \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m}
\end{aligned}
$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\dots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\dots,\tau_m)=$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Phi(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_m)}{(1-\tau_2)\dots(1-\tau_m)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\phi_k\tau_1^k\sum_{y_2,\dots,y_m}\tau_2^{y_1}\dots\tau_m^{y_m}\\
&= \sum_{y_1,\dots,y_m=0}^{\infty}D(y_1,\dots,y_m)\psi_{y_1,\dots,y_m}\tau_1^{y_1}\dots\tau_m^{y_m}
\end{aligned}$$

$$D(y_1,\dots,y_m)\psi_{y_1,\dots,y_m}=\phi_{y_1}$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \ldots, y_m)\psi_{y_1,\ldots,y_m} = \phi_{y_1}$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \ldots, y_m)\psi_{y_1,\ldots,y_m} = \phi_{y_1}$$

$$a \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \phi_a = 0$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \ldots, y_m)\psi_{y_1,\ldots,y_m} = \phi_{y_1}$$

$$a \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \phi_a = 0$$

$$\psi_{y_1,\ldots,y_m} = \begin{cases} 0, & \text{если } y_1 \in \mathfrak{M} \\ \frac{\phi_{y_1}}{D(y_1,\ldots,y_m)}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M}_0 \Longleftrightarrow \exists x_2 \dots x_m \{ D_0(a, x_2, \dots, x_m) = 0 \}$$
$$a \in \mathfrak{M}_1 \Longleftrightarrow \exists x_2 \dots x_m \{ D_1(a, x_2, \dots, x_m) = 0 \}$$

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M}_0 \Longleftrightarrow \exists x_2 \dots x_m \{D_0(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$
$$a \in \mathfrak{M}_1 \Longleftrightarrow \exists x_2 \dots x_m \{D_1(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

$$(1-\tau_2)\dots(1-\tau_m)\, D_0\left(\tau_1\tfrac{\partial}{\partial\tau_1}, \tau_2\tfrac{\partial}{\partial\tau_2}, \dots, \tau_m\tfrac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) =$$
$$= \Phi_0(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial\tau_2}\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \tfrac{\partial}{\partial\tau_m}\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0,$$
$$(1-\tau_2)\dots(1-\tau_m)\, D_1\left(\tau_1\tfrac{\partial}{\partial\tau_1}, \tau_2\tfrac{\partial}{\partial\tau_2}, \dots, \tau_m\tfrac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) =$$
$$= \Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial\tau_2}\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \tfrac{\partial}{\partial\tau_m}\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$$

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M}_0 \Longleftrightarrow \exists x_2 \dots x_m \{D_0(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$
$$a \in \mathfrak{M}_1 \Longleftrightarrow \exists x_2 \dots x_m \{D_1(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

$$(1-\tau_2)\dots(1-\tau_m)\, D_0\left(\tau_1 \tfrac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \tfrac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \tfrac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) =$$
$$= \Phi_0(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi_0(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \tfrac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi_0(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0,$$
$$(1-\tau_2)\dots(1-\tau_m)\, D_1\left(\tau_1 \tfrac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \tfrac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \tfrac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) =$$
$$= \Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \tfrac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$$

$$\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{0,k} \tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_0 \Longrightarrow \phi_{0,a} = 0$$

$$\sum^{\infty}$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{0,k}\tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_0 \Longrightarrow \phi_{0,a} = 0$$

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k}\tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_1 \Longrightarrow \phi_{1,a} = 0$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{0,k} \tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_0 \Longrightarrow \phi_{0,a} = 0$$

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k} \tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_1 \Longrightarrow \phi_{1,a} = 0$$

$$(1 - \tau_1)\big(\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) + \Phi_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)\big) = 1$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{0,k} \tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_0 \Longrightarrow \phi_{0,a} = 0$$

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k} \tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_1 \Longrightarrow \phi_{1,a} = 0$$

$$(1 - \tau_1)\big(\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) + \Phi_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)\big) = 1$$

$$\phi_{0,a} + \phi_{1,a} = 1, \qquad a = 0, 1, \ldots$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{0,k}\tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_0 \implies \phi_{0,a} = 0$$

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k}\tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_1 \implies \phi_{1,a} = 0$$

$$(1 - \tau_1)\big(\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) + \Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)\big) = 1$$

$$\phi_{0,a} + \phi_{1,a} = 1, \qquad a = 0, 1, \dots$$

$$\mathfrak{M} = \{a \mid \phi_{0,a} = 0\}$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{0,k} \tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_0 \Longrightarrow \phi_{0,a} = 0$$

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k} \tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_1 \Longrightarrow \phi_{1,a} = 0$$

$$(1 - \tau_1)\big(\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) + \Phi_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)\big) = 1$$

$$\phi_{0,a} + \phi_{1,a} = 1, \qquad a = 0, 1, \ldots$$

$$\mathfrak{M} = \{a \mid \phi_{0,a} = 0\}$$

$$a \in \mathfrak{M}_0 \Longrightarrow \phi_{0,a} = 0 \Longrightarrow a \in \mathfrak{M}$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{0,k} \tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_0 \Longrightarrow \phi_{0,a} = 0$$

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k} \tau^k \qquad a \in \mathfrak{M}_1 \Longrightarrow \phi_{1,a} = 0$$

$$(1 - \tau_1)\big(\Phi_0(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) + \Phi_1(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)\big) = 1$$

$$\phi_{0,a} + \phi_{1,a} = 1, \qquad a = 0, 1, \ldots$$

$$\mathfrak{M} = \{a \mid \phi_{0,a} = 0\}$$

$$a \in \mathfrak{M}_0 \Longrightarrow \phi_{0,a} = 0 \Longrightarrow a \in \mathfrak{M}$$

$$a \in \mathfrak{M}_1 \Longrightarrow \phi_{1,a} = 0 \Longrightarrow \phi_{0,a} = 1 \Longrightarrow a \notin \mathfrak{M}$$