

Диофантова альтернатива

$$D(x_1, \dots, x_m) = 0$$

▶ либо

$$\exists x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$

▶ либо

$$\forall x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) \neq 0\}$$

Вещественные неизвестные

$$D(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0$$

Вещественные неизвестные

$$D(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0$$

$$\sin(\pi\chi_1) = 0$$

$$\vdots$$

$$\sin(\pi\chi_m) = 0$$

$$\pi = 3.14159\dots$$

$$D^2(\chi_1, \dots, \chi_m) + \sin^2(\pi\chi_1) + \dots + \sin^2(\pi\chi_m) = 0$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть \mathcal{F}_0 обозначает класс функций многих вещественных переменных, которые могут быть заданы выражениями, построенными из переменных, конкретных натуральных чисел и числа π при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции \sin в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной функции $\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m)$ из класса \mathcal{F}_0 распознавал, имеет ли уравнение

$$\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0$$

решение в вещественных числах.

Только натуральные коэффициенты

$$\sin(\psi) = 0 \quad 2 \leq \psi \leq 4$$

$$D^2(\chi_1, \dots, \chi_m) + \\ \sin^2(\psi\chi_1) + \dots + \sin^2(\psi\chi_m) + \\ \sin^2(\psi) + (1 - (\psi - 3)^2 - \zeta^2)^2 = 0$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть \mathcal{F}_1 обозначает класс функций многих вещественных переменных, которые могут быть заданы выражениями, построенными из переменных, конкретных натуральных чисел при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции \sin в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной функции $\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m)$ из класса \mathcal{F}_1 распознавал, имеет ли уравнение

$$\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0$$

решение в вещественных числах.

Альтернативы

$$D(x_1, \dots, x_m)$$

▶ либо

$$\exists x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$

▶ либо

$$\forall x_1 \dots x_m \{D(x_1, \dots, x_m) \neq 0\}$$

$$\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m)$$

▶ либо

$$\exists \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0\}$$

▶ либо

$$\forall \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) \neq 0\}$$

Альтернативы

- ▶ либо

$$\exists x_1 \dots x_m \{2D^2(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$

- ▶ либо

$$\forall x_1 \dots x_m \{2D^2(x_1, \dots, x_m) > 1\}$$

- ▶ либо

$$\exists \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0\}$$

- ▶ либо

$$\forall \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) > 1\}$$

$$\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = (B^2(\chi_1, \dots, \chi_m) + 1)(D^2(\chi_1, \dots, \chi_m) + \sin^2(\pi\chi_1) + \dots + \sin^2(\pi\chi_m))$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть \mathcal{F}_0 по-прежнему обозначает класс функций многих вещественных переменных, которые могут быть заданы выражениями, построенными из переменных, конкретных натуральных чисел и числа π при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции \sin в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной функции $\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m)$ из класса \mathcal{F}_0 распознавал, имеет ли неравенство

$$\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) < 1$$

решение в вещественных числах.

Случай одной переменной

$$A(\chi) = \chi \sin(\chi)$$

$$B(\chi) = \chi \sin(\chi^3)$$

Лемма. Для любых вещественных чисел α и β и любого положительного числа ϵ найдется вещественное число χ такое, что

$$|A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

$$B(\chi) - \beta = 0$$

Не ограничивая общности считаем, что $\epsilon < 1$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Найдем положительное δ такое, что

$$|\chi - \chi_0| < \delta \Rightarrow |A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Найдем положительное δ такое, что

$$|\chi - \chi_0| < \delta \Rightarrow |A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

$$|A(\chi) - \alpha|$$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Найдем положительное δ такое, что

$$|\chi - \chi_0| < \delta \Rightarrow |A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

$$|A(\chi) - \alpha| = |A(\chi) - A(\chi_0)|$$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Найдем положительное δ такое, что

$$|\chi - \chi_0| < \delta \Rightarrow |A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |A(\chi) - \alpha| &= |A(\chi) - A(\chi_0)| \\ &= |A'(\chi^*)(\chi - \chi_0)| \end{aligned}$$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Найдем положительное δ такое, что

$$|\chi - \chi_0| < \delta \Rightarrow |A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |A(\chi) - \alpha| &= |A(\chi) - A(\chi_0)| \\ &= |A'(\chi^*)(\chi - \chi_0)| \quad \text{где } |\chi^* - \chi_0| < \delta \end{aligned}$$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Найдем положительное δ такое, что

$$|\chi - \chi_0| < \delta \Rightarrow |A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |A(\chi) - \alpha| &= |A(\chi) - A(\chi_0)| \\ &= |A'(\chi^*)(\chi - \chi_0)| \quad \text{где } |\chi^* - \chi_0| < \delta \\ &= |(\sin(\chi^*) + \chi^* \cos(\chi^*))(\chi - \chi_0)| \end{aligned}$$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Найдем положительное δ такое, что

$$|\chi - \chi_0| < \delta \Rightarrow |A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |A(\chi) - \alpha| &= |A(\chi) - A(\chi_0)| \\ &= |A'(\chi^*)(\chi - \chi_0)| \quad \text{где } |\chi^* - \chi_0| < \delta \\ &= |(\sin(\chi^*) + \chi^* \cos(\chi^*))(\chi - \chi_0)| \\ &< (1 + |\chi_0| + \delta)\delta \end{aligned}$$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Найдем положительное δ такое, что

$$|\chi - \chi_0| < \delta \Rightarrow |A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |A(\chi) - \alpha| &= |A(\chi) - A(\chi_0)| \\ &= |A'(\chi^*)(\chi - \chi_0)| \quad \text{где } |\chi^* - \chi_0| < \delta \\ &= |(\sin(\chi^*) + \chi^* \cos(\chi^*))(\chi - \chi_0)| \\ &< (1 + |\chi_0| + \delta)\delta \\ &< (2K\pi + 3)\delta \end{aligned}$$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Найдем положительное δ такое, что

$$|\chi - \chi_0| < \delta \Rightarrow |A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |A(\chi) - \alpha| &= |A(\chi) - A(\chi_0)| \\ &= |A'(\chi^*)(\chi - \chi_0)| \quad \text{где } |\chi^* - \chi_0| < \delta \\ &= |(\sin(\chi^*) + \chi^* \cos(\chi^*))(\chi - \chi_0)| \\ &< (1 + |\chi_0| + \delta)\delta \\ &< (2K\pi + 3)\delta \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Найдем положительное δ такое, что

$$|\chi - \chi_0| < \delta \Rightarrow |A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

$$\begin{aligned} |A(\chi) - \alpha| &= |A(\chi) - A(\chi_0)| \\ &= |A'(\chi^*)(\chi - \chi_0)| \quad \text{где } |\chi^* - \chi_0| < \delta \\ &= |(\sin(\chi^*) + \chi^* \cos(\chi^*))(\chi - \chi_0)| \\ &< (1 + |\chi_0| + \delta)\delta \\ &< (2K\pi + 3)\delta \\ &< \epsilon \quad \text{при } \delta = \frac{\epsilon}{2K\pi + 3} \end{aligned}$$

Случай одной переменной

$$(\chi_0 + \delta)^3 - (\chi_0 - \delta)^3$$

Случай одной переменной

$$(\chi_0 + \delta)^3 - (\chi_0 - \delta)^3 = 6\chi_0^2\delta + 2\delta^3$$

Случай одной переменной

$$\begin{aligned}(\chi_0 + \delta)^3 - (\chi_0 - \delta)^3 &= 6\chi_0^2\delta + 2\delta^3 \\ &> \frac{6(2K\pi - \frac{\pi}{2})^2\epsilon}{2K\pi + 3}\end{aligned}$$

Случай одной переменной

$$\begin{aligned}(\chi_0 + \delta)^3 - (\chi_0 - \delta)^3 &= 6\chi_0^2\delta + 2\delta^3 \\ &> \frac{6(2K\pi - \frac{\pi}{2})^2\epsilon}{2K\pi + 3} \\ &> 2\pi\end{aligned}$$

Случай одной переменной

$$\begin{aligned}(\chi_0 + \delta)^3 - (\chi_0 - \delta)^3 &= 6\chi_0^2\delta + 2\delta^3 \\ &> \frac{6(2K\pi - \frac{\pi}{2})^2\epsilon}{2K\pi + 3} \\ &> 2\pi \quad \text{при достаточно большом } K\end{aligned}$$

Случай одной переменной

$$\begin{aligned}(\chi_0 + \delta)^3 - (\chi_0 - \delta)^3 &= 6\chi_0^2\delta + 2\delta^3 \\ &> \frac{6(2K\pi - \frac{\pi}{2})^2\epsilon}{2K\pi + 3} \\ &> 2\pi \quad \text{при достаточно большом } K\end{aligned}$$

$$B(\chi) = \beta$$

Случай одной переменной

$$\begin{aligned}(\chi_0 + \delta)^3 - (\chi_0 - \delta)^3 &= 6\chi_0^2\delta + 2\delta^3 \\ &> \frac{6(2K\pi - \frac{\pi}{2})^2\epsilon}{2K\pi + 3} \\ &> 2\pi \quad \text{при достаточно большом } K\end{aligned}$$

$$B(\chi) = \beta$$

$$|A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

Случай одной переменной

Лемма. Для любых вещественных чисел α и β и любого положительного числа ϵ найдется вещественное число χ такое, что $|A(\chi) - \alpha| < \epsilon$, $B(\chi) = \beta$.

Случай одной переменной

Лемма. Для любых вещественных чисел α и β и любого положительного числа ϵ найдется вещественное число χ такое, что $|A(\chi) - \alpha| < \epsilon$, $B(\chi) = \beta$.

$$|A(C_\epsilon(\alpha, \beta)) - \alpha| < \epsilon \quad B(C_\epsilon(\alpha, \beta)) = \beta$$

Случай одной переменной

Лемма. Для любых вещественных чисел α и β и любого положительного числа ϵ найдется вещественное число χ такое, что $|A(\chi) - \alpha| < \epsilon$, $B(\chi) = \beta$.

$$|A(C_\epsilon(\alpha, \beta)) - \alpha| < \epsilon \quad B(C_\epsilon(\alpha, \beta)) = \beta$$

$$A_k(\chi) = A \underbrace{(B(\dots B(\chi)\dots))}_{(k-1) \text{ раз}}$$

Случай одной переменной

Лемма. Для любых вещественных чисел α и β и любого положительного числа ϵ найдется вещественное число χ такое, что $|A(\chi) - \alpha| < \epsilon$, $B(\chi) = \beta$.

$$|A(C_\epsilon(\alpha, \beta)) - \alpha| < \epsilon \quad B(C_\epsilon(\alpha, \beta)) = \beta$$

$$A_k(\chi) = A \underbrace{(B \dots B}_{(k-1) \text{ раз}}(\chi) \dots)$$

Лемма. Для любых вещественных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и любого положительного числа ϵ

$$|A_k(\chi) - \alpha_k| < \epsilon \quad k = 1, \dots, n$$

где

$$\chi = C_\epsilon(\alpha_1, C_\epsilon(\alpha_2, \dots, C_\epsilon(\alpha_k, 0) \dots))$$

Случай одной переменной

▶ либо

$$\exists \chi_1 \dots \chi_m \{ \Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0 \}$$

▶ либо

$$\forall \chi_1 \dots \chi_m \{ \Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) > 1 \}$$

Случай одной переменной

▶ либо

$$\exists \chi_1 \dots \chi_m \{ \Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0 \}$$

▶ либо

$$\forall \chi_1 \dots \chi_m \{ \Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) > 1 \}$$

$$\Psi(\chi) = \Phi(A_1(\chi), A_2(\chi), \dots, A_m(\chi))$$

Случай одной переменной

▶ либо

$$\exists \chi_1 \dots \chi_m \{ \Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0 \}$$

▶ либо

$$\forall \chi_1 \dots \chi_m \{ \Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) > 1 \}$$

$$\Psi(\chi) = \Phi(A_1(\chi), A_2(\chi), \dots, A_m(\chi))$$

▶ либо

$$\forall \epsilon > 0 \exists \chi \{ \Psi(\chi) < \epsilon \}$$

▶ либо

$$\forall \chi \{ \Psi(\chi) \geq 1 \}$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть \mathcal{F}_0^1 обозначает класс функций одной вещественной переменной, которые могут быть заданы выражениями, построенными из переменной, конкретных натуральных чисел и числа π при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции \sin в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной функции $\Phi(x)$ из класса \mathcal{F}_0^1 распознавал, имеет ли неравенство

$$\Phi(x) < 1$$

решение в вещественных числах.

Следствие DPRM-теоремы

Пусть \mathcal{F}_0^1 обозначает класс функций одной вещественной переменной, которые могут быть заданы выражениями, построенными из переменной, конкретных натуральных чисел и числа π при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции \sin в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной функции $\Phi(x)$ из класса \mathcal{F}_0^1 распознавал, имеет ли уравнение

$$2\Phi(x) = 1$$

решение в вещественных числах.

Тождества

- ▶ либо

$$\forall \epsilon > 0 \exists \chi \{ \Psi(\chi) < \epsilon \}$$

- ▶ либо

$$\forall \chi \{ \Psi(\chi) \geq 1 \}$$

Тождества

▶ либо

$$\forall \epsilon > 0 \exists \chi \{ \Psi(\chi) < \epsilon \}$$

▶ либо

$$\forall \chi \{ \Psi(\chi) \geq 1 \}$$

▶ либо

$$\exists \chi \{ 1 - \Psi(\chi) + |1 - \Psi(\chi)| \neq 0 \}$$

▶ либо

$$\forall \chi \{ 1 - \Psi(\chi) + |1 - \Psi(\chi)| = 0 \}$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть \mathcal{F}_2^1 обозначает класс функций одной вещественной переменной, которые могут быть заданы выражениями, построенными из переменной, конкретных натуральных чисел и числа π при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функций \sin и $||$ (абсолютная величина) в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной функции $\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m)$ из класса \mathcal{F}_2^1 распознавал, справедливо ли равенство

$$2\Phi(\chi) = 1$$

при всех вещественных значениях χ .

Снова полиномиальные уравнения

$$\tau \in [0, 1]$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\tau \in [0, 1]$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\sin(\Pi(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\sin(\Pi(\tau)\tau) \quad \cos(\Pi(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$A \sin(\Pi(\tau)\tau) \quad \cos(\Pi(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$A \sin(\Pi(\tau)\tau) \quad B \cos(\Pi(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$A \sin(\Pi(\tau)\tau) + B \cos(\Pi(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\tau) + B \cos(\Pi(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\tau) + B \cos(\Pi(\tau)\tau)$$

$$\Phi(0) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\tau) + B \cos(\Pi(\tau)\tau)$$

$$\Phi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\tau)$$

$$\Phi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\tau)$$

$$\Phi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Phi'(0) = 1$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\tau)$$

$$\Phi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Phi'(0) = 1 \Rightarrow A \neq 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\tau)$$

$$\Phi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Phi'(0) = 1 \Rightarrow A \neq 0$$

$$\Phi(1) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\tau)$$

$$\Phi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Phi'(0) = 1 \Rightarrow A \neq 0$$

$$\Phi(1) = 0 \Rightarrow \Pi(1) = n\pi$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\tau)$$

$$\Phi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Phi'(0) = 1 \Rightarrow A \neq 0$$

$$\Phi(1) = 0 \Rightarrow \Pi(\tau) = n\pi$$

$$3 \leq \Pi(0) \leq 4$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\tau)$$

$$\Phi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Phi'(0) = 1 \Rightarrow A \neq 0$$

$$\Phi(1) = 0 \Rightarrow \Pi(\tau) = n\pi$$

$$3 \leq \Pi(0) \leq 4 \Rightarrow \Pi(\tau) = \pi$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\tau)$$

$$\Phi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Phi'(0) = 1 \Rightarrow A \neq 0$$

$$\Phi(1) = 0 \Rightarrow \Pi(\tau) = n\pi$$

$$3 \leq \Pi(0) \leq 4 \Rightarrow \Pi(\tau) = \pi$$

В любом решении этой системы дифференциальных уравнений функция $\Pi(\tau)$ является константой – числом π , и существует решение, в котором эта функция тождественно равна числу π .

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{array}{l} \Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 1 \quad \Phi(1) = 0 \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{array}$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{array}{l} \Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 1 \quad \Phi(1) = 0 \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{array}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) &= 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) &= 0 \\ \Phi(0) &= 0 & \Phi'(0) &= 1 & \Phi(1) &= 0 & 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) &= 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) &= 0 \\ \Phi(0) &= 0 & \Phi'(0) &= 1 & \Phi(1) &= 0 & 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) = 0 & \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 & \quad \Phi'(0) = 1 & \quad \Phi(1) = 0 & \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau) \quad \cos(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) &= 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) &= 0 \\ \Phi(0) &= 0 & \Phi'(0) &= 1 & \Phi(1) &= 0 & 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau) \quad \cos(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) &= 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) &= 0 \\ \Phi(0) &= 0 & \Phi'(0) &= 1 & \Phi(1) &= 0 & 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau) \quad B \cos(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) = 0 & \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 & \quad \Phi'(0) = 1 & \quad \Phi(1) = 0 & \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau) + B \cos(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) &= 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) &= 0 \\ \Phi(0) &= 0 & \Phi'(0) &= 1 & \Phi(1) &= 0 & 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau) + B \cos(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 1 \quad \Phi(1) = 0 \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau) + B \cos(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

$$\Psi(0) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) = 0 & \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 & \quad \Phi'(0) = 1 & \quad \Phi(1) = 0 & \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau) + B \cos(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 1 \quad \Phi(1) = 0 \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 1 \quad \Phi(1) = 0 \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Psi'(0) = \Pi(0)\Upsilon(0)$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 1 \quad \Phi(1) = 0 \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Psi'(0) = \Pi(0)\Upsilon(0) \Rightarrow \Upsilon(0) = 0 \text{ или } A \neq 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 1 \quad \Phi(1) = 0 \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Psi'(0) = \Pi(0)\Upsilon(0) \Rightarrow \Upsilon(0) = 0 \text{ или } A \neq 0$$

$$\Psi(1) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 1 \quad \Phi(1) = 0 \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Psi'(0) = \Pi(0)\Upsilon(0) \Rightarrow \Upsilon(0) = 0 \text{ или } A \neq 0$$

$$\Psi(1) = 0 \Rightarrow \Pi(1)\Upsilon(1) = n\pi$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 1 \quad \Phi(1) = 0 \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Psi'(0) = \Pi(0)\Upsilon(0) \Rightarrow \Upsilon(0) = 0 \text{ или } A \neq 0$$

$$\Psi(1) = 0 \Rightarrow \Pi(1)\Upsilon(1) = n\pi$$

$$\Rightarrow \Upsilon(1) = n$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 1 \quad \Phi(1) = 0 \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \quad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(\tau) = A \sin(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau)$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\Psi'(0) = \Pi(0)\Upsilon(0) \Rightarrow \Upsilon(0) = 0 \text{ или } A \neq 0$$

$$\Psi(1) = 0 \Rightarrow \Pi(1)\Upsilon(1) = n\pi$$

$$\Rightarrow \Upsilon(1) = n$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} & \Pi'(\tau) = 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 & \quad \Phi'(0) = 1 & \quad \Phi(1) = 0 & \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \\ & \Upsilon'(\tau) = 0 & \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0 \\ \Psi(0) = 0 & \quad \Psi'(0) = \Pi(\tau)\Upsilon(\tau) & \quad \Psi(1) = 0 \end{aligned}$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} & \Pi'(\tau) = 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) &= 0 \\ \Phi(0) = 0 & \quad \Phi'(0) = 1 & \quad \Phi(1) = 0 & \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \\ & \Upsilon'(\tau) = 0 & \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) &= 0 \\ \Psi(0) = 0 & \quad \Psi'(0) = \Pi(\tau)\Upsilon(\tau) & \quad \Psi(1) = 0 & \end{aligned}$$

В любом решении этой системы дифференциальных уравнений функция $\Upsilon(\tau)$ является константой – некоторым целым числом, и для любого целого числа n существует решение, в котором функция $\Upsilon(\tau)$ тождественно равна этому числу n .

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{array}{l} \Pi'(\tau) = 0 \quad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0 \\ \Phi(0) = 0 \quad \Phi'(0) = 1 \quad \Phi(1) = 0 \quad 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{array}$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) &= 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) &= 0 \\ \Phi(0) &= 0 & \Phi'(0) &= 1 & \Phi(1) &= 0 & 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon_1'(\tau) = 0 \quad \Psi_1''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_1^2(\tau)\Psi_1(\tau) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) &= 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) &= 0 \\ \Phi(0) &= 0 & \Phi'(0) &= 1 & \Phi(1) &= 0 & 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\Upsilon_1'(\tau) = 0 \quad \Psi_1''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_1^2(\tau)\Psi_1(\tau) = 0$$

...

$$\Upsilon_m'(\tau) = 0 \quad \Psi_m''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_m^2(\tau)\Psi_m(\tau) = 0$$

...

$$\Psi_1(0) = 0 \quad \Psi_1'(0) = \Pi(0)\Upsilon_1(0) \quad \Psi_m(1) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) &= 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) &= 0 \\ \Phi(0) &= 0 & \Phi'(0) &= 1 & \Phi(1) &= 0 & 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_1'(\tau) &= 0 & \Psi_1''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_1^2(\tau)\Psi_1(\tau) &= 0 \\ & & \dots & \\ \Upsilon_m'(\tau) &= 0 & \Psi_m''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_m^2(\tau)\Psi_m(\tau) &= 0 \\ & & \dots & \\ \Psi_1(0) &= 0 & \Psi_1'(0) = \Pi(\tau)\Upsilon_1(\tau) & & \Psi_m(1) &= 0 \\ & & \dots & & & \\ \Psi_m(0) &= 0 & \Psi_m'(0) = \Pi(\tau)\Upsilon_m(\tau) & & \Psi_m(1) &= 0 \end{aligned}$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) &= 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) &= 0 \\ \Phi(0) &= 0 & \Phi'(0) &= 1 & \Phi(1) &= 0 & 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_1'(\tau) &= 0 & \Psi_1''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_1^2(\tau)\Psi_1(\tau) &= 0 \\ & & \dots & \\ \Upsilon_m'(\tau) &= 0 & \Psi_m''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_m^2(\tau)\Psi_m(\tau) &= 0 \\ & & \dots & \\ \Psi_1(0) &= 0 & \Psi_1'(0) &= \Pi(\tau)\Upsilon_1(\tau) & \Psi_m(1) &= 0 \\ & & \dots & \\ \Psi_m(0) &= 0 & \Psi_m'(0) &= \Pi(\tau)\Upsilon_m(\tau) & \Psi_m(1) &= 0 \\ & & D(\Upsilon_1(\tau), \dots, \Upsilon_m(\tau)) &= 0 \end{aligned}$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\begin{aligned} \Pi'(\tau) &= 0 & \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) &= 0 \\ \Phi(0) &= 0 & \Phi'(0) &= 1 & \Phi(1) &= 0 & 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Upsilon_1'(\tau) &= 0 & \Psi_1''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_1^2(\tau)\Psi_1(\tau) &= 0 \\ & & \dots & \\ \Upsilon_m'(\tau) &= 0 & \Psi_m''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_m^2(\tau)\Psi_m(\tau) &= 0 \\ & & \dots & \\ \Psi_1(0) &= 0 & \Psi_1'(0) = \Pi(\tau)\Upsilon_1(\tau) & & \Psi_m(1) &= 0 \\ & & \dots & & & \\ \Psi_m(0) &= 0 & \Psi_m'(0) = \Pi(\tau)\Upsilon_m(\tau) & & \Psi_m(1) &= 0 \\ & & D(\Upsilon_1(\tau), \dots, \Upsilon_m(\tau)) &= 0 \end{aligned}$$

Снова полиномиальные уравнения

$$3 \leq \Pi(0) \leq 4$$

Снова полиномиальные уравнения

$$3 \leq \Pi(0) \leq 4 \iff 3 + \Delta_1^2(0) = \Pi(0) \ \& \ \Pi(0) + \Delta_2^2(0) = 4$$

Снова полиномиальные уравнения

$$3 \leq \Pi(0) \leq 4 \iff 3 + \Delta_1^2(0) = \Pi(0) \ \& \ \Pi(0) + \Delta_2^2(0) = 4$$

$$\Delta(\alpha) = \beta$$

Снова полиномиальные уравнения

$$3 \leq \Pi(0) \leq 4 \iff 3 + \Delta_1^2(0) = \Pi(0) \text{ \& } \Pi(0) + \Delta_2^2(0) = 4$$

$$\Delta(\alpha) = \beta \iff \Delta(\tau) - \beta = (\tau - \alpha)\Omega(\tau)$$

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольной системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} P_1(\tau, \Phi_1(\tau), \dots, \Phi_k(\tau), \Phi'_1(\tau)) &= 0 \\ &\vdots \\ P_k(\tau, \Phi_1(\tau), \dots, \Phi_k(\tau), \Phi'_k(\tau)) &= 0, \end{aligned}$$

где P_1, \dots, P_k – многочлены с целыми коэффициентами, узнать, имеет ли эта система решение на интервале $[0, 1]$.

Следствие (трудное) DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по дифференциальному уравнению вида

$$P_1(\tau, \Phi(\tau), \Phi'(\tau), \dots, \Phi^{(n)}(\tau)) = 0$$

где P – многочлен с целыми коэффициентами, узнать, имеет ли это уравнение решение на интервале $[0, 1]$.

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

$$\Psi'(\tau) = 0, \quad \tau \Phi'(\tau) = \Psi(\tau) \Phi(\tau)$$

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

$$\Psi'(\tau) = 0, \quad \tau\Phi'(\tau) = \Psi(\tau)\Phi(\tau)$$

$$\tau\Phi'(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} k\phi_k \tau^k = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_0 \phi_k \tau^k$$

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

$$\Psi'(\tau) = 0, \quad \tau\Phi'(\tau) = \Psi(\tau)\Phi(\tau)$$

$$\tau\Phi'(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} k\phi_k \tau^k = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_0 \phi_k \tau^k$$

$$k\phi_k = \psi_0 \phi_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

$$\Psi'(\tau) = 0, \quad \tau\Phi'(\tau) = \Psi(\tau)\Phi(\tau)$$

$$\tau\Phi'(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} k\phi_k \tau^k = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_0 \phi_k \tau^k$$

$$k\phi_k = \psi_0 \phi_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вырожденное решение: $\psi_1 = \psi_2 = \dots = 0,$

$\phi_0 = \phi_1 = \dots = 0$

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

$$\Psi'(\tau) = 0, \quad \tau \Phi'(\tau) = \Psi(\tau)\Phi(\tau)$$

$$\tau \Phi'(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} k \phi_k \tau^k = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_0 \phi_k \tau^k$$

$$k \phi_k = \psi_0 \phi_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Вырожденное решение: $\psi_1 = \psi_2 = \dots = 0$,

$$\phi_0 = \phi_1 = \dots = 0$$

Невырожденное решение: $\psi_0 = y, \quad \psi_1 = \psi_2 = \dots = 0$,

$$\phi_0 = \dots = \phi_{y-1} = \phi_{y+1} = \dots = 0$$

Формальные степенные ряды

$$\begin{aligned}\Psi_1'(\tau) &= 0, \\ \tau\Phi_1'(\tau) &= \Psi_1(\tau)\Phi_1(\tau), \\ &\vdots\end{aligned}$$

Формальные степенные ряды

$$\begin{aligned}\Psi_1'(\tau) &= 0, \\ \tau\Phi_1'(\tau) &= \Psi_1(\tau)\Phi_1(\tau), \\ &\vdots \\ \Psi_m'(\tau) &= 0, \\ \tau\Phi_m'(\tau) &= \Psi_m(\tau)\Phi_1(\tau),\end{aligned}$$

Формальные степенные ряды

$$\Psi_1'(\tau) = 0,$$

$$\tau\Phi_1'(\tau) = \Psi_1(\tau)\Phi_1(\tau),$$

$$\vdots$$

$$\Psi_m'(\tau) = 0,$$

$$\tau\Phi_m'(\tau) = \Psi_m(\tau)\Phi_1(\tau),$$

$$D(\Psi_1(\tau), \dots, \Psi_m(\tau)) = 0$$

Формальные степенные ряды

$$\Psi_1'(\tau) = 0,$$

$$\tau\Phi_1'(\tau) = \Psi_1(\tau)\Phi_1(\tau),$$

$$\vdots$$

$$\Psi_m'(\tau) = 0,$$

$$\tau\Phi_m'(\tau) = \Psi_m(\tau)\Phi_1(\tau),$$

$$D(\Psi_1(\tau), \dots, \Psi_m(\tau)) = 0$$

$$\Phi_1(\tau) \dots \Phi_m(\tau) \neq 0$$

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольной системе дифференциальных уравнений вида

$$P_1(\tau, \Phi_1(\tau), \dots, \Phi_k(\tau), \Phi_1'(\tau)) = 0,$$

\vdots

$$P_k(\tau, \Phi_1(\tau), \dots, \Phi_k(\tau), \Phi_k'(\tau)) = 0,$$

где P_m – многочлены с целыми коэффициентами узнать, имеет ли эта система решение в виде формального степенного ряда, удовлетворяющего также условию

$$\Phi_1(\tau) \neq 0.$$

Сходящиеся степенные ряды

Сходящиеся степенные ряды

$$\Psi'(\tau) = 0,$$

$$\tau^2 \Phi'(\tau) - (\Psi(\tau)\tau + 1)\Phi(\tau) + 1 = 0$$

Сходящиеся степенные ряды

$$\Psi'(\tau) = 0,$$

$$\tau^2 \Phi'(\tau) - (\Psi(\tau)\tau + 1)\Phi(\tau) + 1 = 0$$

$$-\phi_0 + 1 = 0$$

Сходящиеся степенные ряды

$$\Psi'(\tau) = 0,$$

$$\tau^2 \Phi'(\tau) - (\Psi(\tau)\tau + 1)\Phi(\tau) + 1 = 0$$

$$-\phi_0 + 1 = 0$$

$$-\psi_0\phi_0 - \psi_1 = 0$$

Сходящиеся степенные ряды

$$\Psi'(\tau) = 0,$$

$$\tau^2 \Phi'(\tau) - (\Psi(\tau)\tau + 1)\Phi(\tau) + 1 = 0$$

$$-\phi_0 + 1 = 0$$

$$-\psi_0\phi_0 - \psi_1 = 0$$

$$(k-1)\phi_{k-1} - \psi_0\phi_{k-1} - \psi_k = 0, \quad k > 2$$

Сходящиеся степенные ряды

$$\Psi'(\tau) = 0,$$

$$\tau^2 \Phi'(\tau) - (\Psi(\tau)\tau + 1)\Phi(\tau) + 1 = 0$$

$$-\phi_0 + 1 = 0$$

$$-\psi_0\phi_0 - \psi_1 = 0$$

$$(k-1)\phi_{k-1} - \psi_0\phi_{k-1} - \psi_k = 0, \quad k > 2$$

$$\phi_0 = 1, \dots, \phi_n = -\psi_0(1 - \psi_0)(2 - \psi_0) \dots (n - \psi_0), \dots$$

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольной системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} P_1(\tau, \Phi_1(\tau), \dots, \Phi_k(\tau), \Phi_1'(\tau)) &= 0, \\ &\vdots \\ P_k(\tau, \Phi_1(\tau), \dots, \Phi_k(\tau), \Phi_k'(\tau)) &= 0, \end{aligned}$$

где P_m – многочлены с целыми коэффициентами узнать, имеет ли эта система решение в виде сходящихся степенных рядов

Уравнения в частных производных

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \dots, y_m) = 0$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \dots, y_m) = 0$$

$$\Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m}$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \dots, y_m) = 0$$

$$\Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m}$$

$$\left(\tau_k \frac{\partial}{\partial \tau_k} \right) \tau_k^{y_k} = y_k \tau_k^{y_k}$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \dots, y_m) = 0$$

$$\Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m}$$

$$\left(\tau_k \frac{\partial}{\partial \tau_k} \right) \tau_k^{y_k} = y_k \tau_k^{y_k}$$

$$\begin{aligned} D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) &= \\ &= \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} D(y_1, \dots, y_m) \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \end{aligned}$$

Уравнения в частных производных

$$D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \quad (*)$$

Уравнения в частных производных

$$D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) &= \\ &= \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} D(y_1, \dots, y_m) \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \end{aligned}$$

Уравнения в частных производных

$$D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) &= \\ &= \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} D(y_1, \dots, y_m) \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \end{aligned}$$

$$\psi_{y_1, \dots, y_m} = \frac{1}{D(y_1, \dots, y_m)}$$

Уравнения в частных производных

$$D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) &= \\ &= \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} D(y_1, \dots, y_m) \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \end{aligned}$$

$$\psi_{y_1, \dots, y_m} = \frac{1}{D(y_1, \dots, y_m)}$$

Дифференциальное уравнение (*) имеет решение в том и только том случае, когда диофантово уравнение

$D(y_1, \dots, y_m) = 0$ решений не имеет

Уравнения в частных производных

$$D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \quad (*)$$

Уравнения в частных производных

$$D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \quad (*)$$

$$(1 - \tau_1) \dots (1 - \tau_m) D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = 1 \quad (**)$$

Уравнения в частных производных

$$D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \quad (*)$$

$$(1 - \tau_1) \dots (1 - \tau_m) D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = 1 \quad (**)$$

Дифференциальные уравнения (*) и (**) имеют решения в том и только том случае, когда диофантово уравнение $D(y_1, \dots, y_m) = 0$ решений не имеет

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольному многочлену Q с целыми коэффициентами узнавать, имеет ли дифференциальное уравнение в частных производных

$$Q\left(\tau_1, \dots, \tau_m, \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = 1$$

решение в виде формального степенного ряда.

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M} \iff \exists x_2 \dots x_m \{D(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M} \iff \exists x_2 \dots x_m \{D(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

$$\begin{aligned} (1 - \tau_2) \dots (1 - \tau_m) D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \\ = \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m), \end{aligned}$$

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M} \iff \exists x_2 \dots x_m \{D(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

$$(1 - \tau_2) \dots (1 - \tau_m) D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \\ = \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \frac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$$

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M} \iff \exists x_2 \dots x_m \{D(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

$$(1 - \tau_2) \dots (1 - \tau_m) D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \\ = \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \frac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$$

$$\Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \tau_1^k$$

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M} \iff \exists x_2 \dots x_m \{ D(a, x_2, \dots, x_m) = 0 \}$$

$$(1 - \tau_2) \dots (1 - \tau_m) D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \\ = \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \frac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$$

$$\Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \tau_1^k$$

$$D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \frac{\Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)}{(1 - \tau_2) \dots (1 - \tau_m)}$$

Уравнения в частных производных

$$D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) =$$

Уравнения в частных производных

$$\begin{aligned} D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) &= \\ &= \frac{\Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)}{(1 - \tau_2) \dots (1 - \tau_m)} \end{aligned}$$

Уравнения в частных производных

$$\begin{aligned} D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) &= \\ &= \frac{\Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)}{(1 - \tau_2) \dots (1 - \tau_m)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \tau_1^k \sum_{y_2, \dots, y_m} \tau_2^{y_2} \dots \tau_m^{y_m} \end{aligned}$$

Уравнения в частных производных

$$\begin{aligned} D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) &= \\ &= \frac{\Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)}{(1 - \tau_2) \dots (1 - \tau_m)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \tau_1^k \sum_{y_2, \dots, y_m} \tau_2^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \\ &= \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} D(y_1, \dots, y_m) \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \end{aligned}$$

Уравнения в частных производных

$$\begin{aligned} D \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) &= \\ &= \frac{\Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)}{(1 - \tau_2) \dots (1 - \tau_m)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \tau_1^k \sum_{y_2, \dots, y_m} \tau_2^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \\ &= \sum_{y_1, \dots, y_m=0}^{\infty} D(y_1, \dots, y_m) \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m} \end{aligned}$$

$$D(y_1, \dots, y_m) \psi_{y_1, \dots, y_m} = \phi_{y_1}$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \dots, y_m)\psi_{y_1, \dots, y_m} = \phi_{y_1}$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \dots, y_m)\psi_{y_1, \dots, y_m} = \phi_{y_1}$$

$$a \in \mathfrak{M} \implies \phi_a = 0$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \dots, y_m)\psi_{y_1, \dots, y_m} = \phi_{y_1}$$

$$a \in \mathfrak{M} \implies \phi_a = 0$$

$$\psi_{y_1, \dots, y_m} = \begin{cases} 0, & \text{если } y_1 \in \mathfrak{M} \\ \frac{\phi_{y_1}}{D(y_1, \dots, y_m)}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Уравнения в частных производных

$$n = 1, 2$$

$$a \in \mathfrak{M}_n \iff \exists x_2 \dots x_m \{D_n(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

Уравнения в частных производных

$$n = 1, 2$$

$$a \in \mathfrak{M}_n \iff \exists x_2 \dots x_m \{D_n(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

$$(1 - \tau_2) \dots (1 - \tau_m) D_n \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \\ = \Phi_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \frac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$$

Уравнения в частных производных

$$n = 1, 2$$

$$a \in \mathfrak{M}_n \iff \exists x_2 \dots x_m \{D_n(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

$$(1 - \tau_2) \dots (1 - \tau_m) D_n \left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \\ = \Phi_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \frac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$$

$$\Phi_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{n,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_n \implies \phi_{n,a} = 0$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_1 \implies \phi_{1,a} = 0$$

$$\Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_2 \implies \phi_{2,a} = 0$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_1 \implies \phi_{1,a} = 0$$

$$\Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_2 \implies \phi_{2,a} = 0$$

$$(1 - \tau_1)(\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) + \Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)) = 1$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_1 \implies \phi_{1,a} = 0$$

$$\Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_2 \implies \phi_{2,a} = 0$$

$$(1 - \tau_1)(\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) + \Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)) = 1$$

$$\phi_{1,a} + \phi_{2,a} = 1, \quad a = 0, 1, \dots$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_1 \implies \phi_{1,a} = 0$$

$$\Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_2 \implies \phi_{2,a} = 0$$

$$(1 - \tau_1)(\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) + \Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)) = 1$$

$$\phi_{1,a} + \phi_{2,a} = 1, \quad a = 0, 1, \dots$$

$$\mathfrak{M} = \{a \mid \phi_{1,a} = 0\}$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_1 \implies \phi_{1,a} = 0$$

$$\Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_2 \implies \phi_{2,a} = 0$$

$$(1 - \tau_1)(\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) + \Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)) = 1$$

$$\phi_{1,a} + \phi_{2,a} = 1, \quad a = 0, 1, \dots$$

$$\mathfrak{M} = \{a \mid \phi_{1,a} = 0\}$$

$$a \in \mathfrak{M}_1 \implies \phi_{1,a} = 0 \implies a \in \mathfrak{M}$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_1 \implies \phi_{1,a} = 0$$

$$\Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2,k} \tau^k \quad a \in \mathfrak{M}_2 \implies \phi_{2,a} = 0$$

$$(1 - \tau_1)(\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) + \Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)) = 1$$

$$\phi_{1,a} + \phi_{2,a} = 1, \quad a = 0, 1, \dots$$

$$\mathfrak{M} = \{a \mid \phi_{1,a} = 0\}$$

$$a \in \mathfrak{M}_1 \implies \phi_{1,a} = 0 \implies a \in \mathfrak{M}$$

$$a \in \mathfrak{M}_2 \implies \phi_{2,a} = 0 \implies \phi_{1,a} = 1 \implies a \notin \mathfrak{M}$$