Формализмы для описания параллельных/распределенных вычислений

Сети Петри (Petri net, place/transition net, P/T net)

Wikipedia: Petri nets were invented by Carl Adam Petri in August 1939 – at the age of 13 – for the purpose of describing chemical processes

Системы векторного сложения (systems of vector addition)

Системы векторного сложения

$$\Delta_1 = \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle$$

$$\vdots \qquad\qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta_k = \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle$$

$$\alpha_1 \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

$$A = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \to \langle \alpha_1 + \delta_{j,1}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \rangle = A + \Delta_j$$

$$\alpha_1 + \delta_{j,1} \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \in \mathbb{N}$$

$$A \to A + \Delta_{j_1} \to A + \Delta_{j_1} + \Delta_{j_2} \to A + \Delta_{j_1} + \Delta_{j_2} + \Delta_{j_3} \to \ldots$$

Проблема достижимости

ВХОД: Система векторного сложения $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и два вектора A и B

ВОПРОС: Верно ли, что вектор B достижим из вектора A в этой системе?

Проблема включения

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ и $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и вектор A

ВОПРОС: Верно ли, что каждый вектор, достижимый из вектора A во второй системе, достижим из вектора A также и в первой системе?

Теорема (Michael Rabin, не опубликовано). *Проблема включения для систем векторного сложения неразрешима.*

Проблема включения

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ и $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и вектор A

ВОПРОС: Верно ли, что каждый вектор, достижимый из вектора A во второй системе, достижим из вектора A также и в первой системе?

Теорема (Michael Rabin, не опубликовано). *Проблема включения для систем векторного сложения неразрешима.*

Проблема эквивалентности

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ и $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и вектор A

ВОПРОС: Верно ли, что каждый вектор, достижимый из вектора A в одной из этих систем, достижим из вектора A также и в другой системе?

Теорема (M. Hack; T. Araki и T. Kasami). *Проблема эквивалентности для систем векторного сложения неразрешима.*

Обобщенные кони на многомерной шахматной доске

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle\end{aligned} \qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

Обозначение. $\mathfrak{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – это множество всех полей, на которых может побывать конь, начав свой путь с поля $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$

Проблема включения

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Обобщенные кони на многомерной шахматной доске

$$\Delta_1 = \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle$$
$$\vdots \qquad\qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$
$$\Delta_k = \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle$$

Обозначение. $\mathfrak{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – это множество всех полей, на которых может побывать конь, начав свой путь с поля $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$

Проблема включения

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Проблема эквивалентности

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Сравнение проблем

Обозначение. $\mathfrak{K}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – это множество всех полей, на которых может побывать конь, начав свой путь с поля $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$

Проблема включения

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Проблема эквивалентности

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Специальные кони

$$\langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle \qquad \delta_m \in \{-1, 0, 1\}$$

$$\begin{aligned}
&\delta_{i_1} = \cdots = \delta_{i_a} = -1 \\
&\delta_{j_1} = \cdots = \delta_{j_b} = 1 \\
&\delta_m = 0, \text{ если } \ m \notin \{i_1, \ldots, i_a, j_1, \ldots, j_b\}
\end{aligned}$$

$$\langle i_1, \ldots, i_a \rangle \rightarrowtail \langle j_1, \ldots, j_b \rangle$$

$$R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1} \ldots R_{j_b}$$

Шахматная машина

Шахматная машина имеет конечное количество *регистров* $R_1, \ldots, R_n$, каждый из которых может содержать произвольно большое натуральное число. Машина может находиться в одном из конечного числа состояний $S_1, \ldots, S_m$; *инструкции* машины имеют вид

$$S_{i_0} R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail S_{j_0} R_{j_1} \ldots R_{j_b}$$

где все числа $i_0, i_1, \ldots, i_a, j_0, j_1, \ldots, j_b$ попарно различны.

Шахматная машина является недетерминированной!

Вычисления на шахматной машине

Определение. Пусть в некоторой шахматной машине выделено начальное состояние S_b, заключительное состояние S_e, входные регистры $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}$ и выходной регистр O_j. Поместим коня на поле

$$\langle r_1, \ldots, r_n \rangle \qquad (*)$$

где $r_b = 1$, $r_{i_1} = x_1, \ldots, r_{i_k} = x_k$, а все остальные регистры пусты. Мы говорим, что шахматная машина вычисляет функцию $F(x_1, \ldots, x_k)$, если выполены следующие три условия.

1. Если поле $\langle r'_1, \ldots, r'_n \rangle$ достижимо с поля $(*)$, то $r'_j \leq F(x_1, \ldots, x_k)$
2. Для любого y такого, что $y \leq F(x_1, \ldots, x_k)$, существует поле $\langle r'_1, \ldots, r'_n \rangle$, достижимое с поля $(*)$ и такое, что $r_j = y$, $r_e = 1$.
3. Состояние S_e не встречается в левых частях инструкций машины.

Включение и эквивалентность

Проблема включения

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Проблема эквивалентности

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Включение и эквивалентность

Проблема включения

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Проблема эквивалентности

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

$$\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \iff \mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \& \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}'(\mathcal{A})$$

Включение и эквивалентность

Проблема включения

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Проблема эквивалентности

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

$$\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \iff \mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \& \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}'(\mathcal{A})$$

$$\mathfrak{K}'(r_1, \dots, r_n) \supseteq \mathfrak{K}''(r_1, \dots, r_n) \iff$$
$$\iff \mathfrak{K}'(r_1, \dots, r_n) = \mathfrak{K}'(r_1, \dots, r_n) \cup \mathfrak{K}''(r_1, \dots, r_n)$$

Включение и эквивалентность

Проблема включения

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

Проблема эквивалентности

ВХОД: Два обобщеных коня $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$ и поле $\mathcal{A}$

ВОПРОС: Верно ли, $\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A})$

$$\mathfrak{K}'(\mathcal{A}) = \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \iff \mathfrak{K}'(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \& \mathfrak{K}''(\mathcal{A}) \supseteq \mathfrak{K}'(\mathcal{A})$$

$$\mathfrak{K}'(r_1, \ldots, r_n) \supseteq \mathfrak{K}''(r_1, \ldots, r_n) \iff$$
$$\iff \mathfrak{K}'(r_1, \ldots, r_n) = \mathfrak{K}'(r_1, \ldots, r_n) \cup \mathfrak{K}''(r_1, \ldots, r_n)$$

$$\mathfrak{K}'''(r_1, \ldots, r_n) = \mathfrak{K}'(r_1, \ldots, r_n) \cup \mathfrak{K}''(r_1, \ldots, r_n)$$

Включение и эквивалентность

$\mathfrak{K}'$	$\mathfrak{K}''$

Включение и эквивалентность

$\mathfrak{K}'$	$\mathfrak{K}''$
$R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1} \ldots R_{j_b}$	

Включение и эквивалентность

$\mathfrak{K}'$ $R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1} \dots R_{j_b}$	$\mathfrak{K}''$
$T_{m+4} R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+5} R_{j_1} \dots R_{j_b}$ $T_{m+5} R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+4} R_{j_1} \dots R_{j_b}$	

Включение и эквивалентность

$\mathfrak{K}'$	$\mathfrak{K}''$
$R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1} \dots R_{j_b}$	$R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1} \dots R_{j_b}$
$T_{m+4} R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+5} R_{j_1} \dots R_{j_b}$	$T_{m+6} R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+7} R_{j_1} \dots R_{j}$
$T_{m+5} R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+4} R_{j_1} \dots R_{j_b}$	$T_{m+7} R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+6} R_{j_1} \dots R_{j_b}$

Включение и эквивалентность

$\mathfrak{K}'$	$\mathfrak{K}''$
$R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1}\dots R_{j_b}$	$R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1}\dots R_{j_b}$
$T_{m+4}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+5}R_{j_1}\dots R_{j_b}$	$T_{m+6}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+7}R_{j_1}\dots R_{j_b}$
$T_{m+5}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+4}R_{j_1}\dots R_{j_b}$	$T_{m+7}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+6}R_{j_1}\dots R_{j_b}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+4}S_{m+2}$	
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+5}S_{m+2}$	

Включение и эквивалентность

$\mathfrak{K}'$	$\mathfrak{K}''$
$R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1}\ldots R_{j_b}$	$R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1}\ldots R_{j_b}$
$T_{m+4}R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+5}R_{j_1}\ldots R_{j_b}$	$T_{m+6}R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+7}R_{j_1}\ldots R_{j}$
$T_{m+5}R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+4}R_{j_1}\ldots R_{j_b}$	$T_{m+7}R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+6}R_{j_1}\ldots R_{j_b}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+4}S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+6}S_{m+2}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+5}S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+7}S_{m+2}$

Включение и эквивалентность

$\mathfrak{K}'$	$\mathfrak{K}''$
$R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1} \dots R_{j_b}$	$R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1} \dots R_{j_b}$
$T_{m+4} R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+5} R_{j_1} \dots R_{j_b}$	$T_{m+6} R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+7} R_{j_1} \dots R_{j_b}$
$T_{m+5} R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+4} R_{j_1} \dots R_{j_b}$	$T_{m+7} R_{i_1} \dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+6} R_{j_1} \dots R_{j_b}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+4} S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+6} S_{m+2}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+5} S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+7} S_{m+2}$
$T_{m+4} \rightarrowtail$	
$T_{m+5} \rightarrowtail$	

Включение и эквивалентность

$\mathfrak{K}'$	$\mathfrak{K}''$
$R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1}\ldots R_{j_b}$	$R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1}\ldots R_{j_b}$
$T_{m+4}R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+5}R_{j_1}\ldots R_{j_b}$	$T_{m+6}R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+7}R_{j_1}\ldots R_{j}$
$T_{m+5}R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+4}R_{j_1}\ldots R_{j_b}$	$T_{m+7}R_{i_1}\ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+6}R_{j_1}\ldots R_{j_b}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+4}S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+6}S_{m+2}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+5}S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+7}S_{m+2}$
$T_{m+4} \rightarrowtail$	$T_{m+4} \rightarrowtail$
$T_{m+5} \rightarrowtail$	$T_{m+5} \rightarrowtail$
	$T_{m+6} \rightarrowtail$
	$T_{m+7} \rightarrowtail$

Включение и эквивалентность

$\mathfrak{K}'$	$\mathfrak{K}''$
$R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1}\dots R_{j_b}$	$R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1}\dots R_{j_b}$
$T_{m+4}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+5}R_{j_1}\dots R_{j_b}$	$T_{m+6}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+7}R_{j_1}\dots R_{j}$
$T_{m+5}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+4}R_{j_1}\dots R_{j_b}$	$T_{m+7}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+6}R_{j_1}\dots R_{j_b}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+4}S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+6}S_{m+2}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+5}S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+7}S_{m+2}$
$T_{m+4} \rightarrowtail$	$T_{m+4} \rightarrowtail$
$T_{m+5} \rightarrowtail$	$T_{m+5} \rightarrowtail$
	$T_{m+6} \rightarrowtail$
	$T_{m+7} \rightarrowtail$
$\mathfrak{K}'''$	

Включение и эквивалентность

$\mathfrak{K}'$	$\mathfrak{K}''$
$R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1}\dots R_{j_b}$	$R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1}\dots R_{j_b}$
$T_{m+4}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+5}R_{j_1}\dots R_{j_b}$	$T_{m+6}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+7}R_{j_1}\dots R_{j}$
$T_{m+5}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+4}R_{j_1}\dots R_{j_b}$	$T_{m+7}R_{i_1}\dots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+6}R_{j_1}\dots R_{j_b}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+4}S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+6}S_{m+2}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+5}S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+7}S_{m+2}$
$T_{m+4} \rightarrowtail$	$T_{m+4} \rightarrowtail$
$T_{m+5} \rightarrowtail$	$T_{m+5} \rightarrowtail$
	$T_{m+6} \rightarrowtail$
	$T_{m+7} \rightarrowtail$
$\mathfrak{K}'''$	$\mathfrak{K}''''$

Включение и эквивалентность

$\mathfrak{K}'$	$\mathfrak{K}''$
$R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1} \ldots R_{j_b}$	$R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail R_{j_1} \ldots R_{j_b}$
$T_{m+4} R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+5} R_{j_1} \ldots R_{j_b}$	$T_{m+6} R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+7} R_{j_1} \ldots R_{j_b}$
$T_{m+5} R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+4} R_{j_1} \ldots R_{j_b}$	$T_{m+7} R_{i_1} \ldots R_{i_a} \rightarrowtail T_{m+6} R_{j_1} \ldots R_{j_b}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+4} S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+6} S_{m+2}$
$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+5} S_{m+2}$	$S_{m+8} \rightarrowtail T_{m+7} S_{m+2}$
$T_{m+4} \rightarrowtail$	$T_{m+4} \rightarrowtail$
$T_{m+5} \rightarrowtail$	$T_{m+5} \rightarrowtail$
	$T_{m+6} \rightarrowtail$
	$T_{m+7} \rightarrowtail$
$\mathfrak{K}'''$	$\mathfrak{K}''''$

$$\mathfrak{K}' \supseteq \mathfrak{K}'' \iff \mathfrak{K}''' = \mathfrak{K}''''$$

Унификация (невсеобщее равенство)

$$E_1(x_1, \ldots, x_m) = E_2(x_1, \ldots, x_m)$$

Унификация (невсеобщее равенство)

$$E_1(x_1, \ldots, x_m) = E_2(x_1, \ldots, x_m)$$

Проблема унификации для чистого исчисления предикатов первого порядка разрешима.

Унификация (невсеобщее равенство)

$$E_1(x_1, \ldots, x_m) = E_2(x_1, \ldots, x_m)$$

Проблема унификации для чистого исчисления предикатов первого порядка разрешима.

Проблема унификации для исчисления предикатов третьего порядка неразрешима.

Унификация (невсеобщее равенство)

$$E_1(x_1, \ldots, x_m) = E_2(x_1, \ldots, x_m)$$

Проблема унификации для чистого исчисления предикатов первого порядка разрешима.

Проблема унификации для исчисления предикатов третьего порядка неразрешима. L. D. Baxter [1978] дал новое доказательство этого факта с использованием неразрешимости диофантовых уравнений.

Унификация (невсеобщее равенство)

$$E_1(x_1, \ldots, x_m) = E_2(x_1, \ldots, x_m)$$

Проблема унификации для чистого исчисления предикатов первого порядка разрешима.

Проблема унификации для исчисления предикатов третьего порядка неразрешима. L. D. Baxter [1978] дал новое доказательство этого факта с использованием неразрешимости диофантовых уравнений.

W. D. Golfarb [1981] установил неразрешимость проблема унификации для исчисления предикатов второго порядка, исходя из неразрешимости 10-й проблемы Гильберта.

Как перемножать термы?

$$T_n = \underbrace{F(F(\ldots F}_{n \quad \text{times}}(x)\ldots));$$

Как перемножать термы?

$$T_n = \underbrace{F(F(\dots F}_{n\ \text{times}}(x)\dots));$$

Сложение $n + m$: подстановка T_m вместо x в T_n

Как перемножать термы?

$$T_n = \underbrace{F(F(\dots F}_{n \text{ times}}(x)\dots));$$

Сложение $n + m$: подстановка T_m вместо x в T_n

Умножение $n \times m$: ?

Одна история

Одна история

Разрешима ли проблема так называемой *одновременной жесткой E-унификации (simultaneous rigid E-unification)*?

Одна история

Разрешима ли проблема так называемой *одновременной жесткой E-унификации (simultaneous rigid E-unification)*?

А. Воронков и А. Дегтярев установили неразрешимость одновременной жесткой E-унификации

Одна история

Разрешима ли проблема так называемой *одновременной жесткой E-унификации (simultaneous rigid E-unification)*?

А. Воронков и А. Дегтярев установили неразрешимость одновременной жесткой E-унификации путем сведения к ней так называемой *проблемы монадической полуунификации (monadic semi-unification problem)*.

Одна история

Разрешима ли проблема так называемой *одновременной жесткой E-унификации (simultaneous rigid E-unification)*?

А. Воронков и А. Дегтярев установили неразрешимость одновременной жесткой E-унификации путем сведения к ней так называемой *проблемы монадической полуунификации (monadic semi-unification problem)*.

Неразрешимость проблемы монадической полуунификации установил ранее M. Baaz [1993] путем сведения к ней проблемы унификации для исчисления предикатов второго порядка.

Одна история

Разрешима ли проблема так называемой *одновременной жесткой E-унификации (simultaneous rigid E-unification)*?

А. Воронков и А. Дегтярев установили неразрешимость одновременной жесткой E-унификации путем сведения к ней так называемой *проблемы монадической полуунификации (monadic semi-unification problem)*.

Неразрешимость проблемы монадической полуунификации установил ранее M. Baaz [1993] путем сведения к ней проблемы унификации для исчисления предикатов второго порядка.

W. D. Golfarb [1981] установил неразрешимость проблемы унификации для исчисления предикатов второго порядка, исходя из неразрешимости 10-й проблемы Гильберта.

Одна история

Разрешима ли проблема так называемой *одновременной жесткой E-унификации (simultaneous rigid E-unification)*?

А. Воронков и А. Дегтярев [1996] дали прямое доказательство неразрешимость одновременной жесткой E-унификации на основе неразрешимости 10-й проблемы Гильберта.

Вычислительный хаос в теории чисел

Вычислительный хаос в теории чисел

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \dots x_m [P(a, x_1, \dots, x_m) = 0]$$

Вычислительный хаос в теории чисел

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots x_m [P(a, x_1, \ldots, x_m) = 0]$$

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} \bigcap \{a \mid a \leq n\}$$

Вычислительный хаос в теории чисел

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \dots x_m [P(a, x_1, \dots, x_m) = 0]$$

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} \bigcap \{a \mid a \leq n\}$$

Множество $\mathfrak{M}_n$ может быть эффективно найдено по значению его можности $\|\mathfrak{M}_n\|$.

Вычислительный хаос в теории чисел

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_1 \dots x_m [P(a, x_1, \dots, x_m) = 0]$$

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} \bigcap \{a \mid a \leq n\}$$

Множество $\mathfrak{M}_n$ может быть эффективно найдено по значению его можности $\|\mathfrak{M}_n\|$.

Вычислительный хаос в теории чисел

Gregory Chaitin [1987] построил конкретное однопараметрическое экспоненциально диофантово уравнение и рассмотрел множество всех значений параметра, при которых уравнение имеет бесконечно много решений:

$$a \in \mathfrak{M} \iff \exists^{\infty} x_1 \dots x_m [E(a, x_1, x_2, \dots, x_m) = 0]$$

Вычислительный хаос в теории чисел

Gregory Chaitin [1987] построил конкретное однопараметрическое экспоненциально диофантово уравнение и рассмотрел множество всех значений параметра, при которых уравнение имеет бесконечно много решений:

$$a \in \mathfrak{M} \iff \exists^{\infty} x_1 \ldots x_m [E(a, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0]$$

Chaitin доказал, что так называемая *префиксная (prefix-free)* колмогоровская сложность начального сегмента

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} \bigcap \{a \,|\, a \leq n\}$$

равна n (с точностью до аддитивной константы).

Вычислительный хаос в теории чисел

Toby Ord и Tien D. Kieu [2003] построили другое однопараметрическое экспоненциально диофантово уравнение, которое при каждом значении параметра имеет конечное количество решений и рассмотрели множество всех значений параметра, при которых количество решений четно:

$$a \in \mathfrak{M} \iff \exists^{\text{even}} x_1 \ldots x_m [E(a, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0]$$

Вычислительный хаос в теории чисел

Toby Ord и Tien D. Kieu [2003] построили другое однопараметрическое экспоненциально диофантово уравнение, которое при каждом значении параметра имеет конечное количество решений и рассмотрели множество всех значений параметра, при которых количество решений четно:

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists^{\mathrm{even}} x_1 \ldots x_m [E(a, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0]$$

Ord и Kieu доказали, что префиксная колмогоровская сложность начального сегмента

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} \bigcap \{a \,|\, a \leq n\}$$

также равна n (с точностью до аддитивной константы).

Одно обобщение 10-й проблемы Гильберта

Теорема (M. Davis [1972]). *Пусть* $\mathfrak{U}$ *– собственное подножество множества* $\{0, 1, 2, \dots, \infty\}$*. Не существует алгоритма, позволяющего по произвольному диофантову уравнению узнавать, принадлежит ли количество его решений множеству* $\mathfrak{U}$.

Одно обобщение 10-й проблемы Гильберта

Теорема (M. Davis [1972]). *Пусть* $\mathfrak{U}$ *– собственное подножество множества* $\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$*. Не существует алгоритма, позволяющего по произвольному диофантову уравнению узнавать, принадлежит ли количество его решений множеству* $\mathfrak{U}$.

Hilbert's 10th problem is the case $\mathfrak{U} = \{0\}$.

Вычислительный хаос в теории чисел

Теорема (Матиясевич [2006]). *Пусть* $\mathfrak{U}$ *– разрешимое бесконечное множество, дополнение которого также бесконечно. Можно построить однопараметрическое экспоненциально диофантово уравнение*

$$E(a, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \qquad (*)$$

которое при каждом значении параметра имеет конечное количество решений и такое, что префиксная колмогоровская сложность начального сегмента

$$\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} \bigcap \{a \mid a \le n\}$$

равна n *(с точностью до аддитивной константы), где*

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists^{\mathfrak{U}} x_1 \ldots x_m [E(a, x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0]$$

– это множество всех значений параметра a*, при которых можность множества решений уравнения* $(*)$ *лежит в* $\mathfrak{U}$*.*

Диофантовы игры

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \ldots, a_m$

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \ldots, a_m$
*Н*иколай выбирает значения *н*еизвестных $x_1, \ldots, x_m$

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \dots, a_m$
*Н*иколай выбирает значения *н*еизвестных $x_1, \dots, x_m$

- Петр выбирает a_1

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \dots, a_m$
*Н*иколай выбирает значения *н*еизвестных $x_1, \dots, x_m$

- Петр выбирает a_1
- Николай выбирает x_1

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \dots, a_m$
*Н*иколай выбирает значения *н*еизвестных $x_1, \dots, x_m$

- Петр выбирает a_1
- Николай выбирает x_1
- Петр выбирает a_2

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \dots, a_m$
*Н*иколай выбирает значения *н*еизвестных $x_1, \dots, x_m$

- Петр выбирает a_1
- Николай выбирает x_1
- Петр выбирает a_2
- Николай выбирает x_2

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \dots, a_m$
*Н*иколай выбирает значения *н*еизвестных $x_1, \dots, x_m$

- Петр выбирает a_1
- Николай выбирает x_1
- Петр выбирает a_2
- Николай выбирает x_2
- ....

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'а [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \dots, a_m$
*Н*иколай выбирает значения *н*еизвестных $x_1, \dots, x_m$

- Петр выбирает a_1
- Николай выбирает x_1
- Петр выбирает a_2
- Николай выбирает x_2
- ....
- Петр выбирает a_m

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \dots, a_m$
*Н*иколай выбирает значения *н*еизвестных $x_1, \dots, x_m$

- Петр выбирает a_1
- Николай выбирает x_1
- Петр выбирает a_2
- Николай выбирает x_2
- ....
- Петр выбирает a_m
- Николай выбирает x_m

Диофантовы игры

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \dots, a_m, x_1, \dots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \dots, a_m$
*Н*иколай выбирает значения *н*еизвестных $x_1, \dots, x_m$

- Петр выбирает a_1
- Николай выбирает x_1
- Петр выбирает a_2
- Николай выбирает x_2
- ....
- Петр выбирает a_m
- Николай выбирает x_m

Николай объявляется победителем в том и только том случае, когда значение многочлена оказывается равным нулю.

Диофантовы игры

Упражнение. *Кто имеет выигрышную стратегию в игре, задаваемой уравнением*

$$(x_1 + a_2)^2 + 1 - (x_2 + 2)(x_3 + 3) = 0?$$

Диофантовы игры

Упражнение. *Кто имеет выигрышную стратегию в игре, задаваемой уравнением*

$$(x_1 + a_2)^2 + 1 - (x_2 + 2)(x_3 + 3) = 0?$$

Подсказка. Победа гарантирована Петру в том и только том случае, когда количество простых чисел вида $n^2 + 1$ бесконечно.

Теорема (Jones[1982]) *Николай имеет выигрышную стратегию, но не имеет вычислимой выигрышной стратегии в игре*

$$\Big\{\{a_1 + a_6 + 1 - x_4\}^2 \cdot \Big\{\Big\langle (a_6 + a_7)^2 + 3a_7 + a_6 - 2x_4\Big\rangle^2$$

$$+ \Big\langle \Big[(x_9 - a_7)^2 + (x_{10} - a_9)^2\Big]\Big[(x_9 - a_6)^2 + (x_{10} - a_8)^2((x_4 - a_1)^2$$

$$+ (x_{10} - a_9 - x_1)^2)\Big]\Big[(x_9 - 3x_4)^2 + (x_{10} - a_8 - a_9)^2\Big]\Big[(x_9 - 3x_4 - 1)^2$$

$$+ (x_{10} - a_8 a_9)^2\Big] - a_{12} - 1\Big\rangle^2 + \Big\langle [x_{10} + a_{12} + a_{12} x_9 a_4 - a_3]^2$$

$$+ [x_5 + a_{13} - x_9 a_4]^2\Big\rangle\Big\} - x_{13} - 1\Big\}\{a_1 + x_5 + 1 - a_5\}\Big\{\Big\langle (x_5 - x_6)^2$$

$$+ 3x_6 + x_5 - 2a_5\Big\rangle^2 + \Big\langle \Big[(a_{10} - x_6)^2 + (a_{11} - x_8)^2\Big]\Big[(a_{10} - x_5)^2$$

$$+ (a_{11} - x_7)^2((a_5 - a_1)^2 + (a_{11} - x_8 - a_2)^2)\Big]\Big[(a_{10} - 3a_5)^2$$

$$+ (a_{11} - x_7 - x_8)^2\Big]\Big[(a_{10} - 3a_5 - 1)^2 + (a_{11} - x_7 x_8)^2\Big] - x_{11} - 1\Big\rangle^2$$

$$+ \Big\langle [a_{11} + x_{11} + x_{11} a_{10} x_3 - x_2]^2 + [a_{11} + x_{12} - a_{10} x_3]^2\Big\rangle\Big\} = 0.$$

Другие результаты

A. H. Lachlan [1970] ввел другой класс игр как возможный инструмент установления результатов про решетку перечислимых множеств и высказал гипотезу, что для этих игр есть алгоритм распознавания, который из двух игроков имеет выигрышную стратегию.

Другие результаты

A. H. Lachlan [1970] ввел другой класс игр как возможный инструмент установления результатов про решетку перечислимых множеств и высказал гипотезу, что для этих игр есть алгоритм распознавания, который из двух игроков имеет выигрышную стратегию.

M. Kummer [2006] получил много результатов о неразрешимости игр Lachlan'a, используя неразрешимсть 10-й проблемы Гильберта.

Другие результаты

K. Prasad [1991] установил, что для «традиционных» некоперативных игр нескольких лиц с полиномиальными функциями платежей невозможен алгоритм, который по произвольной игре говорил бы, имеет ли она *равновесие Нэша (Nash equilibrium) в чистых стратегиях*;

Другие результаты

K. Prasad [1991] установил, что для «традиционных» некооперативных игр нескольких лиц с полиномиальными функциями платежей невозможен алгоритм, который по произвольной игре говорил бы, имеет ли она *равновесие Нэша (Nash equilibrium) в чистых стратегиях*; для получения аналогичного результата для *смешанных стратегий* требуются однократные представления и поэтому неразрешимость была установлена только для случая, когда функции платежа строятся с помощью сложения, умножения и возведения в степень.

Другие результаты

K. Prasad [1991] установил, что для «традиционных» некоперативных игр нескольких лиц с полиномиальными функциями платежей невозможен алгоритм, который по произвольной игре говорил бы, имеет ли она *равновесие Нэша (Nash equilibrium) в чистых стратегиях*; для получения аналогичного результата для *смешанных стратегий* требуются однократные представления и поэтому неразрешимость была установлена только для случая, когда функции платежа строятся с помощью сложения, умножения и возведения в степень.

K. Prasad [1991] также перенес результаты Chaitin'а с вопросов о бесконечности количества решений у экспоненциально диофантовых уравнений на вопросы о бесконечности количества равновесий Нэша.

Вычислительные модели, мотивированные биологией. I

Вычислительные модели, мотивированные биологией. I

Правило рекомбинации:

$$U_1 \# U_2 \& U_3 \# U_4 : \langle x_1 U_1 U_2 x_2, y_1 U_3 U_4 y_2 \rangle \mapsto \langle x_1 U_1 U_4 x_2, y_1 U_3 U_2 y_2 \rangle$$

Вычислительные модели, мотивированные биологией. I

Правило рекомбинации:

$$U_1 \# U_2 \& U_3 \# U_4 : \langle x_1 U_1 U_2 x_2, y_1 U_3 U_4 y_2 \rangle \mapsto \langle x_1 U_1 U_4 x_2, y_1 U_3 U_2 y_2 \rangle$$

Правила рекомбинации сами по себе порождают только регулярные языки, тем не мене, при введении некоторой управляющей структуры они становятся столь же мощными как, скажем, машины Тьюринга.

P. Frisco [2001] дал новое доказательство этого факта, используя DPRM-теорему.

Вычислительные модели, мотивированные биологией. II

Мембранные вычисления, мотивированные обменом веществ в живой клетке, ввел George Paun [1998].

Вычислительные модели, мотивированные биологией. II

Мембранные вычисления, мотивированные обменом веществ в живой клетке, ввел George Paun [1998].

Á. R. Jiménez и M. J. P. Jiménez [2002], а также C. Li., Z. Dang, O. H. Ibarra и H.-Ch. Yen [2005] использовали DPRM-теорему для демонстрации вычислительной силы разных версий мембранных вычислений.