

RED

BLUE

Что можно делать с вещественными числами и нельзя делать с целыми числами

Ю. В. МАТИЯСЕВИЧ

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

<http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat>

Что можно делать с вещественными числами и нельзя делать с целыми числами

Часть 1. Алгоритм Альфреда Тарского

Ю. В. МАТИЯСЕВИЧ

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

<http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat>

Книга Альфреда Тарского



ALFRED TARSKI (1901–1983)

Книга Альфреда Тарского



ALFRED TARSKI (1901–1983)

A decision method for elementary algebra and geometry
Santa Monica CA, RAND Corp.,
1948.

Книга Альфреда Тарского



ALFRED TARSKI (1901–1983)

A decision method for **elementary**
algebra and geometry
Santa Monica CA, RAND Corp.,
1948.

Книга Альфреда Тарского



ALFRED TARSKI (1901–1983)

A decision method for **elementary**
algebra and geometry
Santa Monica CA, RAND Corp.,
1948.

Книга Альфреда Тарского



ALFRED TARSKI (1901–1983)

A decision method for **elementary**
algebra and geometry
Santa Monica CA, RAND Corp.,
1948.

Разрешающая процедура для
элементарной алгебры и геомет-
рии

Книга Альфреда Тарского



ALFRED TARSKI (1901–1983)

A decision method for **elementary** algebra and geometry
Santa Monica CA, RAND Corp.,
1948.

Разрешающая процедура для
элементарной алгебры и геометрии

Разрешающая процедура для
элементарных алгебры и геометрии

Геометрия

Геометрия

- ▶ Задачи на вычисление

Геометрия

- ▶ Задачи на вычисление
- ▶ Задачи на построение

Геометрия

- ▶ Задачи на вычисление
- ▶ Задачи на построение
- ▶ Задачи на доказательство

Язык геометрии (планиметрии)

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки
- ▶ прямые

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки
- ▶ прямые
- ▶ окружности

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки
- ▶ прямые
- ▶ окружности
- ▶ ...

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки
- ▶ прямые
- ▶ окружности
- ▶ ...

Отношения:

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки
- ▶ прямые
- ▶ окружности
- ▶ ...

Отношения:

- ▶ "Точка A лежит на прямой ℓ "

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки
- ▶ прямые
- ▶ окружности
- ▶ ...

Отношения:

- ▶ "Точка A лежит на прямой ℓ "
- ▶ "Точка A лежит на окружности O "

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки
- ▶ прямые
- ▶ окружности
- ▶ ...

Отношения:

- ▶ "Точка A лежит на прямой ℓ "
- ▶ "Точка A лежит на окружности O "
- ▶ "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D "

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки
- ▶ прямые
- ▶ окружности
- ▶ ...

Отношения:

- ▶ "Точка A лежит на прямой ℓ "
- ▶ "Точка A лежит на окружности O "
- ▶ "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D "
- ▶ ...

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки
- ▶ прямые
- ▶ окружности
- ▶ ...

Отношения:

- ▶ "Точка A лежит на прямой ℓ " , $\text{OnLine}(A, \ell)$
- ▶ "Точка A лежит на окружности O "
- ▶ "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D "
- ▶ ...

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки
- ▶ прямые
- ▶ окружности
- ▶ ...

Отношения:

- ▶ "Точка A лежит на прямой ℓ " , $\text{OnLine}(A, \ell)$
- ▶ "Точка A лежит на окружности O " , $\text{OnCircle}(A, O)$
- ▶ "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D "
- ▶ ...

Язык геометрии (планиметрии)

Объекты:

- ▶ точки
- ▶ прямые
- ▶ окружности
- ▶ ...

Отношения:

- ▶ "Точка A лежит на прямой ℓ " , $\text{OnLine}(A, \ell)$
- ▶ "Точка A лежит на окружности O " , $\text{OnCircle}(A, O)$
- ▶ "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D " , $\text{EqDistance}(A, B, C, D)$
- ▶ ...

Язык геометрии (планиметрии):

Язык геометрии (планиметрии):

Аксиомы:

Язык геометрии (планиметрии):

Аксиомы:

- ▶ "Для любых двух точек A и B существует прямая ℓ , на которой обе эти точки лежат":

Язык геометрии (планиметрии):

Аксиомы:

- ▶ "Для любых двух точек A и B существует прямая ℓ , на которой обе эти точки лежат":

$$\forall A \forall B \exists \ell \{ \text{OnLine}(A, \ell) \wedge \text{OnLine}(B, \ell) \}$$

Язык геометрии (планиметрии):

Аксиомы:

- ▶ "Для любых двух точек A и B существует прямая ℓ , на которой обе эти точки лежат":

$$\forall A \forall B \exists \ell \{ \text{OnLine}(A, \ell) \wedge \text{OnLine}(B, \ell) \}$$

- ▶ "Если точки A и B различны и обе лежат на прямых ℓ и m , то эти прямые совпадают":

Язык геометрии (планиметрии):

Аксиомы:

- ▶ "Для любых двух точек A и B существует прямая ℓ , на которой обе эти точки лежат":

$$\forall A \forall B \exists \ell \{ \text{OnLine}(A, \ell) \wedge \text{OnLine}(B, \ell) \}$$

- ▶ "Если точки A и B различны и обе лежат на прямых ℓ и m , то эти прямые совпадают":

$$\forall A \forall B \forall \ell \forall m \{ A \neq B \wedge \text{OnLine}(A, \ell) \wedge \text{OnLine}(B, \ell) \wedge \\ \wedge \text{OnLine}(A, m) \wedge \text{OnLine}(B, m) \Rightarrow \ell = m \}$$

- ▶ ...

Теорема

Каковы бы ни были три попарно различные точки A_1 , A_2 и A_3 , существуют точки B_1 , B_2 , B_3 и C и прямые ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 , m_1 , m_2 и m_3 такие что

$$\begin{aligned} & \text{OnLine}(A_2, \ell_1) \wedge \text{OnLine}(A_3, \ell_1) \wedge \text{OnLine}(B_1, \ell_1) \wedge \\ & \quad \wedge \text{OnLine}(A_1, \ell_2) \wedge \text{OnLine}(A_3, \ell_2) \wedge \text{OnLine}(B_2, \ell_2) \wedge \\ & \quad \wedge \text{OnLine}(A_1, \ell_3) \wedge \text{OnLine}(A_2, \ell_3) \wedge \text{OnLine}(B_3, \ell_3) \wedge \\ & \quad \wedge \text{OnLine}(A_1, m_1) \wedge \text{OnLine}(B_1, m_1) \wedge \text{OnLine}(C, m_1) \wedge \\ & \quad \wedge \text{OnLine}(A_2, m_2) \wedge \text{OnLine}(B_2, m_2) \wedge \text{OnLine}(C, m_2) \wedge \\ & \quad \wedge \text{OnLine}(A_3, m_3) \wedge \text{OnLine}(B_3, m_3) \wedge \text{OnLine}(C, m_3) \wedge \\ & \quad \wedge \text{EqDistance}(A_1, B_2, B_2, A_3) \wedge \\ & \quad \wedge \text{EqDistance}(A_2, B_1, B_1, A_3) \wedge \\ & \quad \wedge \text{EqDistance}(A_1, B_3, B_3, A_2) \end{aligned}$$

Язык геометрии (новая версия):

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- ▶ точки

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- ▶ точки

Отношения:

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- ▶ точки

Отношения:

- ▶ "Точки A , B и C лежат на одной прямой"

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- ▶ точки

Отношения:

- ▶ "Точки A , B и C лежат на одной прямой", $\text{OnLine}(A, B, C)$

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- ▶ точки

Отношения:

- ▶ "Точки A , B и C лежат на одной прямой", $\text{OnLine}(A, B, C)$
- ▶ "Точки A и B лежат на одной окружности с центром в точке C "

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- ▶ точки

Отношения:

- ▶ "Точки A , B и C лежат на одной прямой", $\text{OnLine}(A, B, C)$
- ▶ "Точки A и B лежат на одной окружности с центром в точке C ", $\text{OnCircle}(A, B, C)$

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- ▶ точки

Отношения:

- ▶ "Точки A , B и C лежат на одной прямой", $\text{OnLine}(A, B, C)$
- ▶ "Точки A и B лежат на одной окружности с центром в точке C ", $\text{OnCircle}(A, B, C)$
- ▶ "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D "

Язык геометрии (новая версия):

Объекты:

- ▶ точки

Отношения:

- ▶ "Точки A , B и C лежат на одной прямой", $\text{OnLine}(A, B, C)$
- ▶ "Точки A и B лежат на одной окружности с центром в точке C ", $\text{OnCircle}(A, B, C)$
- ▶ "Расстояние между точками A и B равно расстоянию между точками C и D ", $\text{EqDistance}(A, B, C, D)$
- ▶ ...

Теорема о пересечении медиан

Каковы бы ни были точки A_1 , A_2 и A_3 , существуют точки B_1 , B_2 , B_3 и C такие, что

$$\begin{aligned} &A_1 \neq A_2 \wedge A_1 \neq A_3 \wedge A_2 \neq A_3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{OnLine}(A_1, A_2, B_3) \wedge \text{OnLine}(A_2, A_3, B_1) \wedge \text{OnLine}(A_1, A_3, B_2) \wedge \\ &\quad \wedge \text{OnLine}(A_1, B_1, C) \wedge \text{OnLine}(A_2, B_2, C) \wedge \text{OnLine}(A_3, B_3, C) \wedge \\ &\quad \wedge \text{EqDistance}(A_1, B_2, B_2, A_3) \wedge \\ &\quad \wedge \text{EqDistance}(A_2, B_1, B_1, A_3) \wedge \\ &\quad \wedge \text{EqDistance}(A_1, B_3, B_3, A_2) \end{aligned}$$

Язык (аналитической) геометрии:

Язык (аналитической) геометрии:

Объекты:

Язык (аналитической) геометрии:

Объекты:

- ▶ точки – пары вещественных чисел $\langle a_x, a_y \rangle$

Язык (аналитической) геометрии:

Объекты:

- ▶ точки – пары вещественных чисел $\langle a_x, a_y \rangle$

Отношения:

Язык (аналитической) геометрии:

Объекты:

- ▶ точки – пары вещественных чисел $\langle a_x, a_y \rangle$

Отношения:

- ▶ "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$, $\langle b_x, b_y \rangle$ и $\langle c_x, c_y \rangle$ лежат на одной прямой"

Язык (аналитической) геометрии:

Объекты:

- ▶ точки – пары вещественных чисел $\langle a_x, a_y \rangle$

Отношения:

- ▶ "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$, $\langle b_x, b_y \rangle$ и $\langle c_x, c_y \rangle$ лежат на одной прямой",
 $\text{OnLine}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$

Язык (аналитической) геометрии:

Объекты:

- ▶ точки – пары вещественных чисел $\langle a_x, a_y \rangle$

Отношения:

- ▶ "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$, $\langle b_x, b_y \rangle$ и $\langle c_x, c_y \rangle$ лежат на одной прямой",
 $\text{OnLine}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$
- ▶ "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$ и $\langle b_x, b_y \rangle$ лежат на одной окружности с центром в точке $\langle c_x, c_y \rangle$ "

Язык (аналитической) геометрии:

Объекты:

- ▶ точки – пары вещественных чисел $\langle a_x, a_y \rangle$

Отношения:

- ▶ "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$, $\langle b_x, b_y \rangle$ и $\langle c_x, c_y \rangle$ лежат на одной прямой",
 $\text{OnLine}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$
- ▶ "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$ и $\langle b_x, b_y \rangle$ лежат на одной окружности с центром в точке $\langle c_x, c_y \rangle$ ", $\text{OnCircle}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$

Язык (аналитической) геометрии:

Объекты:

- ▶ точки – пары вещественных чисел $\langle a_x, a_y \rangle$

Отношения:

- ▶ "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$, $\langle b_x, b_y \rangle$ и $\langle c_x, c_y \rangle$ лежат на одной прямой",
 $\text{OnLine}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$
- ▶ "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$ и $\langle b_x, b_y \rangle$ лежат на одной окружности с центром в точке $\langle c_x, c_y \rangle$ ", $\text{OnCircle}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$
- ▶ "Расстояние между точками $\langle a_x, a_y \rangle$ и $\langle b_x, b_y \rangle$ равно расстоянию между точками $\langle c_x, c_y \rangle$ и $\langle d_x, d_y \rangle$ "

Язык (аналитической) геометрии:

Объекты:

- ▶ точки – пары вещественных чисел $\langle a_x, a_y \rangle$

Отношения:

- ▶ "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$, $\langle b_x, b_y \rangle$ и $\langle c_x, c_y \rangle$ лежат на одной прямой",
 $\text{OnLine}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$
- ▶ "Точки $\langle a_x, a_y \rangle$ и $\langle b_x, b_y \rangle$ лежат на одной окружности с центром в точке $\langle c_x, c_y \rangle$ ", $\text{OnCircle}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$
- ▶ "Расстояние между точками $\langle a_x, a_y \rangle$ и $\langle b_x, b_y \rangle$ равно расстоянию между точками $\langle c_x, c_y \rangle$ и $\langle d_x, d_y \rangle$ ",
 $\text{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y)$
- ▶ ...

Теорема о пересечении медиан

Каковы бы ни были числа $a_{1,x}, a_{1,y}, a_{2,x}, a_{2,y}, a_{3,x}, a_{3,y}$, существуют числа $b_{1,x}, b_{1,y}, b_{2,x}, b_{2,y}, b_{3,x}, b_{3,y}, c_x$ и c_y такие, что

$$\begin{aligned} & (a_{1,x} \neq a_{2,x} \vee a_{1,y} \neq a_{2,y}) \wedge (a_{1,x} \neq a_{3,x} \vee a_{1,y} \neq a_{3,y}) \wedge \\ & \quad \wedge (a_{2,x} \neq a_{3,x} \vee a_{2,y} \neq a_{3,y}) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \text{OnLine}(a_{1,x}, a_{1,y}, a_{2,x}, a_{2,y}, b_{3,x}, b_{3,y}) \wedge \\ & \quad \wedge \text{OnLine}(a_{2,x}, a_{2,y}, a_{3,x}, a_{3,y}, b_{1,x}, b_{1,y}) \wedge \\ & \quad \wedge \text{OnLine}(a_{1,x}, a_{1,y}, a_{3,x}, a_{3,y}, b_{2,x}, b_{2,y}) \wedge \\ & \quad \wedge \text{OnLine}(a_{1,x}, a_{1,y}, b_{1,x}, b_{1,y}, c_x, c_y) \wedge \\ & \quad \wedge \text{OnLine}(a_{2,x}, a_{2,y}, b_{2,x}, b_{2,y}, c_x, c_y) \wedge \\ & \quad \wedge \text{OnLine}(a_{3,x}, a_{3,y}, b_{3,x}, b_{3,y}, c_x, c_y) \wedge \\ & \quad \wedge \text{EqDistance}(a_{1,x}, a_{1,y}, b_{2,x}, b_{2,y}, b_{2,x}, b_{2,y}, a_{3,x}, a_{3,y}) \wedge \\ & \quad \wedge \text{EqDistance}(a_{2,x}, a_{2,y}, b_{1,x}, b_{1,y}, b_{1,x}, b_{1,y}, a_{3,x}, a_{3,y}) \wedge \\ & \quad \wedge \text{EqDistance}(a_{1,x}, a_{1,y}, b_{3,x}, b_{3,y}, b_{3,x}, b_{3,y}, a_{2,x}, a_{2,y}) \end{aligned}$$

Немного алгебры

$\text{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y)$

Немного алгебры

$$\begin{aligned}\text{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y) &\iff \\ &\iff (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (c_x - d_x)^2 + (c_y - d_y)^2\end{aligned}$$

Немного алгебры

$$\begin{aligned}\text{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y) &\iff \\ &\iff (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (c_x - d_x)^2 + (c_y - d_y)^2\end{aligned}$$

$$\text{OnCircle}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$$

Немного алгебры

$$\begin{aligned}\text{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y) &\iff \\ &\iff (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (c_x - d_x)^2 + (c_y - d_y)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{OnCircle}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y) &\iff \\ &\iff \text{EqDistance}(a_x, a_y, c_x, c_y, b_x, b_y, c_x, c_y)\end{aligned}$$

Немного алгебры

$$\begin{aligned}\text{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y) &\iff \\ &\iff (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (c_x - d_x)^2 + (c_y - d_y)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{OnCircle}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y) &\iff \\ &\iff \text{EqDistance}(a_x, a_y, c_x, c_y, b_x, b_y, c_x, c_y) \\ &\iff (a_x - c_x)^2 + (a_y - c_y)^2 = (b_x - c_x)^2 + (b_y - c_y)^2\end{aligned}$$

Немного алгебры

$$\begin{aligned}\text{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y) &\iff \\ &\iff (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (c_x - d_x)^2 + (c_y - d_y)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{OnCircle}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y) &\iff \\ &\iff \text{EqDistance}(a_x, a_y, c_x, c_y, b_x, b_y, c_x, c_y) \\ &\iff (a_x - c_x)^2 + (a_y - c_y)^2 = (b_x - c_x)^2 + (b_y - c_y)^2\end{aligned}$$

$$\text{OnLine}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y)$$

Немного алгебры

$$\begin{aligned}\text{EqDistance}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y, d_x, d_y) &\iff \\ &\iff (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 = (c_x - d_x)^2 + (c_y - d_y)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{OnCircle}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y) &\iff \\ &\iff \text{EqDistance}(a_x, a_y, c_x, c_y, b_x, b_y, c_x, c_y) \\ &\iff (a_x - c_x)^2 + (a_y - c_y)^2 = (b_x - c_x)^2 + (b_y - c_y)^2\end{aligned}$$

$$\text{OnLine}(a_x, a_y, b_x, b_y, c_x, c_y) \iff a_x b_y + a_y c_x + b_x c_y - a_x c_y - a_y b_x - b_y c_x = 0$$

Теорема о пересечении медиан

Каковы бы ни были числа $a_{1,x}, a_{1,y}, a_{2,x}, a_{2,y}, a_{3,x}, a_{3,y}$, существуют числа $b_{1,x}, b_{1,y}, b_{2,x}, b_{2,y}, b_{3,x}, b_{3,y}, c_x$ и c_y такие, что

$$\begin{aligned} & (a_{1,x} \neq a_{2,x} \vee a_{1,y} \neq a_{2,y}) \wedge (a_{1,x} \neq a_{3,x} \vee a_{1,y} \neq a_{3,y}) \wedge \\ & \quad \wedge (a_{2,x} \neq a_{3,x} \vee a_{2,y} \neq a_{3,y}) \Rightarrow \\ \Rightarrow & a_{1,x}a_{2,y} + a_{1,y}b_{3,x} + a_{2,x}b_{3,y} - a_{1,x}b_{3,y} - a_{1,y}a_{2,x} - a_{2,y}b_{3,x} = 0 \wedge \\ & \wedge a_{2,x}a_{3,y} + a_{2,y}b_{1,x} + a_{3,x}b_{1,y} - a_{2,x}b_{1,y} - a_{2,y}a_{3,x} - a_{3,y}b_{1,x} = 0 \wedge \\ & \wedge a_{1,x}a_{3,y} + a_{1,y}b_{2,x} + a_{3,x}b_{2,y} - a_{1,x}b_{2,y} - a_{1,y}a_{3,x} - a_{3,y}b_{2,x} = 0 \wedge \\ & \quad \wedge a_{1,x}b_{1,y} + a_{1,y}c_x + b_{1,x}c_y - a_{1,x}c_y - a_{1,y}b_{1,x} - b_{1,y}c_x = 0 \wedge \\ & \quad \wedge a_{2,x}b_{2,y} + a_{2,y}c_x + b_{2,x}c_y - a_{2,x}c_y - a_{2,y}b_{2,x} - b_{2,y}c_x = 0 \wedge \\ & \quad \wedge a_{3,x}b_{3,y} + a_{3,y}c_x + b_{3,x}c_y - a_{3,x}c_y - a_{3,y}b_{3,x} - b_{3,y}c_x = 0 \wedge \\ & \quad \wedge (a_{1,x} - b_{2,x})^2 + (a_{1,y} - b_{2,y})^2 = (b_{2,x} - a_{3,x})^2 + (b_{2,y} - a_{3,y})^2 \wedge \\ & \quad \wedge (a_{2,x} - b_{1,x})^2 + (a_{2,y} - b_{1,y})^2 = (b_{1,x} - a_{3,x})^2 + (b_{1,y} - a_{3,y})^2 \wedge \\ & \quad \wedge (a_{1,x} - b_{3,x})^2 + (a_{1,y} - b_{3,y})^2 = (b_{3,x} - a_{2,x})^2 + (b_{3,y} - a_{2,y})^2 \end{aligned}$$

Большая Советская Энциклопедия:

Большая Советская Энциклопедия:

Алгебра — один из больших разделов математики, принадлежащий наряду с арифметикой и геометрией к числу старейших ветвей этой науки. Задачи, а также методы алгебры, отличающие ее от других отраслей математики, создавались постепенно, начиная с древности. Алгебра возникла под влиянием нужд общественной практики, и в результате поиска общих приемов для решения однотипных арифметических задач. . . .

Математический Энциклопедический Словарь:

Математический Энциклопедический Словарь:

АЛГЕБРА —

Математический Энциклопедический Словарь:

АЛГЕБРА —

1. часть математики. В этом понимании термин "Алгебра" употребляется в таких сочетаниях, как гомологическая алгебра, коммутативная алгебра, линейная алгебра, топологическая алгебра. ...

Математический Энциклопедический Словарь:

АЛГЕБРА —

1. часть математики. В этом понимании термин "Алгебра" употребляется в таких сочетаниях, как гомологическая алгебра, коммутативная алгебра, линейная алгебра, топологическая алгебра. ...
2. Алгебра над полем P , наз. также линейной алгеброй. Алгебра в этом смысле есть кольцо, в котором определено умножение элементов на элементы из P , удовлетворяющее естественным аксиомам ...

Математический Энциклопедический Словарь:

АЛГЕБРА —

1. часть математики. В этом понимании термин "Алгебра" употребляется в таких сочетаниях, как гомологическая алгебра, коммутативная алгебра, линейная алгебра, топологическая алгебра. ...
2. Алгебра над полем P , наз. также линейной алгеброй. Алгебра в этом смысле есть кольцо, в котором определено умножение элементов на элементы из P , удовлетворяющее естественным аксиомам ...
3. То же, что универсальная алгебра.

Алгебра — это арифметика для лентяев

Иоганн Карл Фридрих Гаусс ?:

Алгебра — это арифметика для лентяев

Иоганн Карл Фридрих Гаусс ?:

Алгебра — это арифметика для лентяев

Алгебра — это геометрия для лентяев

Язык A

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел, $2, -3, 5/7, -451/53, \dots$

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел, $a, b, c, \dots, a_1, b_2, x_6, \dots$

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения, с их помощью строятся многочлены

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся элементарные формулы

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся элементарные формулы:

если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ..., то ...")

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ") , с их помощью строятся формулы

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ") , с их помощью строятся формулы:
если Φ и Ψ – формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \implies \Psi)$
также являются формулами

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=, >, <$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ") , с их помощью строятся формулы:
если Φ и Ψ – формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \implies \Psi)$ также являются формулами.

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ") , с их помощью строятся формулы:
если Φ и Ψ – формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \implies \Psi)$ также являются формулами.

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Верно ли $(*)$?

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=, >, <$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ") , с их помощью строятся формулы:
если Φ и Ψ – формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \implies \Psi)$ также являются формулами.

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Верно ли $(*)$ при $x = 4, y = 5$?

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ") , с их помощью строятся формулы:
если Φ и Ψ – формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \implies \Psi)$ также являются формулами.

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Верно ли $(*)$ при $x = 4, y = 5$?

Верно ли $(*)$ при любых x, y ?

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ") , с их помощью строятся формулы:
если Φ и Ψ – формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \implies \Psi)$ также являются формулами.

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Верно ли $(*)$ при $x = 4, y = 5$?

Верно ли $(*)$ при любых x, y ?

Существуют ли x, y такие, что выполнено $(*)$?

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связи $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ") , с их помощью строятся формулы:
если Φ и Ψ – формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \implies \Psi)$ также являются формулами.

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Верно ли $(*)$ при $x = 4, y = 5$?

Верно ли $(*)$ при любых x, y ?

Существуют ли x, y такие, что выполнено $(*)$?

Верно ли, что для любого x существует y такое, что выполнено $(*)$?

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связи $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ") , с их помощью строятся формулы:
если Φ и Ψ – формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $\neg\Phi$, $(\Phi \implies \Psi)$ также являются формулами.

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Верно ли $(*)$ при $x = 4, y = 5$?

Верно ли $(*)$ при любых x, y ?

Существуют ли x, y такие, что выполнено $(*)$?

Верно ли, что для любого x существует y такое, что выполнено $(*)$?

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ..., то ...")
- ▶ кванторы

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:
если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:
если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:
если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Верно ли $(*)$ при любых x, y ?

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связи $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:
если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Верно ли $(*)$ при любых x, y ?

$$\forall x\{\forall y\{x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y\}\}$$

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:
если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Существуют ли x, y такие, что выполнено $(*)$?

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:
если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Существуют ли x, y такие, что выполнено $(*)$?

$$\exists x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y\}\}$$

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:
если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Верно ли, что для любого x существует y такое, что выполнено $(*)$?

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связи $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ..., то ...")

- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:

если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall \alpha \{\Phi\}$, $\exists \alpha \{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

Верно ли, что для любого x существует y такое, что выполнено $(*)$?

$$\forall x \{ \exists y \{ x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \} \}$$

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ..., то ...")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:
если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y\}\}$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2\} \wedge \exists y\{xy = 3x + 2y\}\}$$

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=, >, <$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:

если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y\}\}$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2\} \wedge \exists y\{xy = 3x + 2y\}\}$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2\} \wedge xy = 3x + 2y\}$$

Язык $\mathcal{L}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ операции сложения и умножения
- ▶ отношения $=, >, <$
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ... , то ... ")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует"), с их помощью строятся формулы:

если Φ – формула, а α – переменная, то $\forall\alpha\{\Phi\}$, $\exists\alpha\{\Phi\}$ также являются формулами

$$x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y \quad (*)$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2 \wedge xy = 3x + 2y\}\}$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2\} \wedge \exists y\{xy = 3x + 2y\}\}$$

$$\forall x\{\exists y\{x^2y + 4xy^3 > (x - y)^2\} \wedge xy = 3x + 2y\}$$

Теорема Альфреда Тарского

Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле языка $\mathcal{A}$ без свободных переменных узнавать за конечное число шагов, является ли эта формула истинной.

Аль-Хорезми Абу Абдалла Мухаммед бен Мусса

Аль-Хорезми Абу Абдалла Мухаммед бен Мусса

Жил примерно в 787-850

Аль-Хорезми Абу Абдалла Мухаммед бен Мусса

Жил примерно в 787-850

"Китаб аль-мухтасар фи хисаб аль-габр в'алмуккабалла"

Язык $\mathcal{A}$

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся элементарные формулы: если P и Q – многочлены, то $P = Q$, $P > Q$, $P < Q$ – элементарные формулы
- ▶ логические связки $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ..., то ...")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Язык $\mathcal{A}$ (новая версия)

- ▶ обозначения для всех рациональных чисел
- ▶ переменные для вещественных чисел
- ▶ отношения $=$, $>$, $<$, с их помощью строятся элементарные формулы: если P – многочлен, то $P = 0$, $P > 0$, $P < 0$ – элементарные формулы
- ▶ логические связи $\wedge$ ("и"), $\vee$ ("или"), $\neg$ ("не"), $\implies$ ("если ..., то ...")
- ▶ кванторы $\forall$ ("для всех"), $\exists$ ("существует")

Теорема Альфреда Тарского

Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле языка $\mathcal{A}$ без свободных переменных узнавать за конечное число шагов, является ли эта формула истинной.

Теорема Альфреда Тарского

Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле языка $\mathcal{A}$ без свободных переменных узнавать за конечное число шагов, является ли эта формула истинной.

Тривиальный случай – бескванторная формула

Теорема Альфреда Тарского

Существует алгоритм, позволяющий по любой формуле языка $\mathcal{A}$ без свободных переменных узнавать за конечное число шагов, является ли эта формула истинной.

Тривиальный случай – бескванторная формула

База индукции – однокванторная формула, $\exists x\Phi(x)$ или $\forall x\Phi(x)$

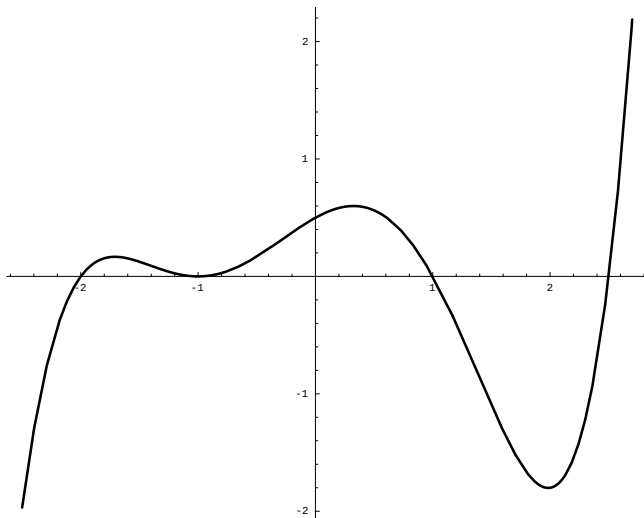
Основная идея

Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 = 0$$

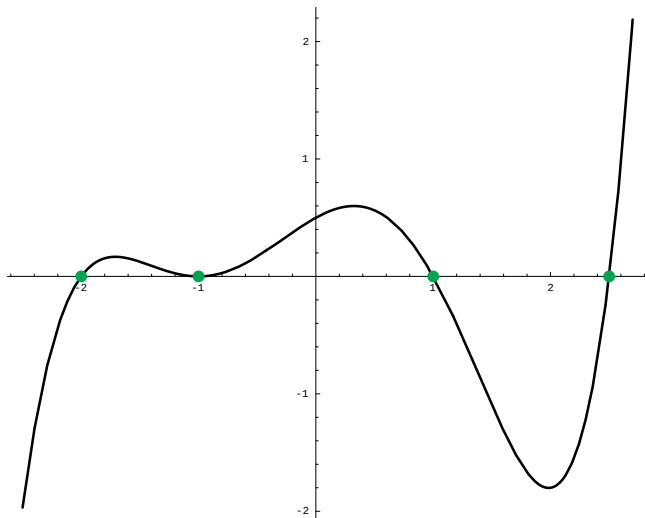
Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 = 0$$



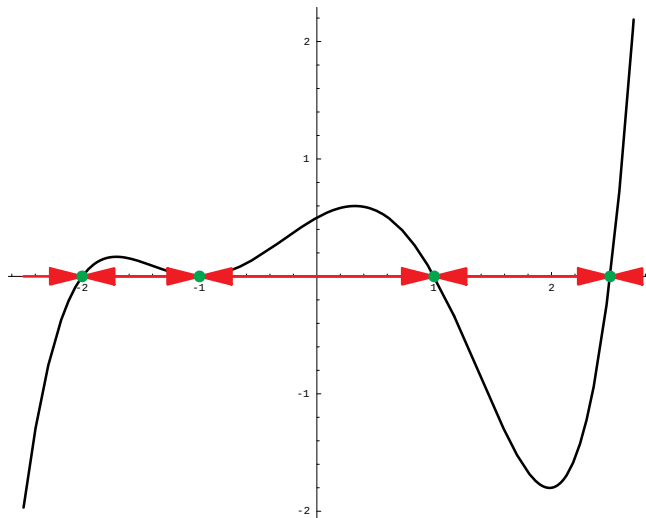
Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 = 0$$



Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 = 0$$

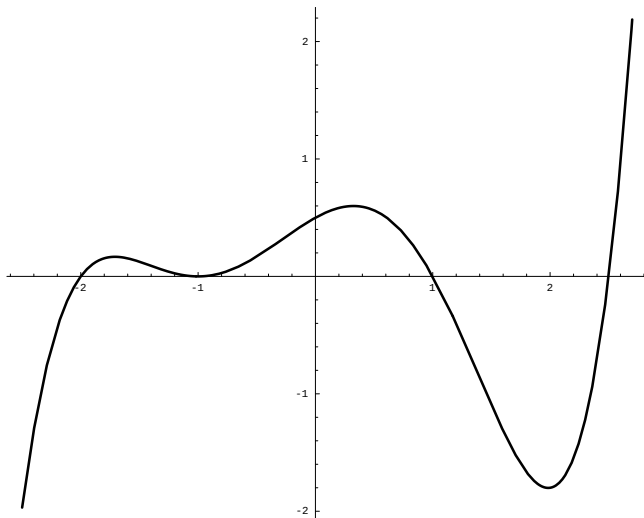


Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 > 0$$

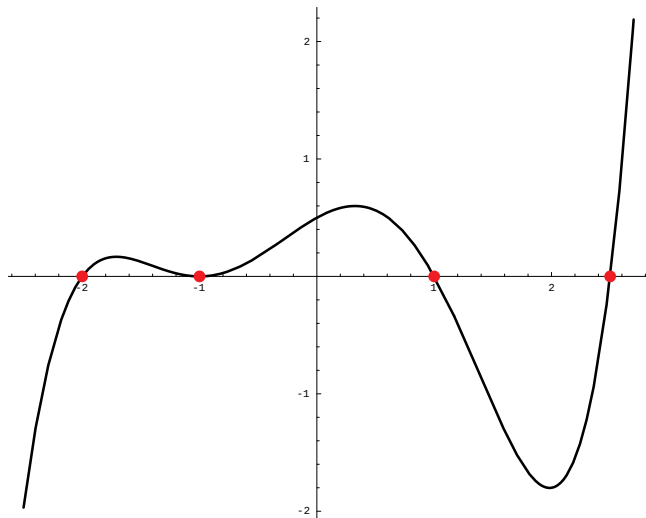
Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 > 0$$



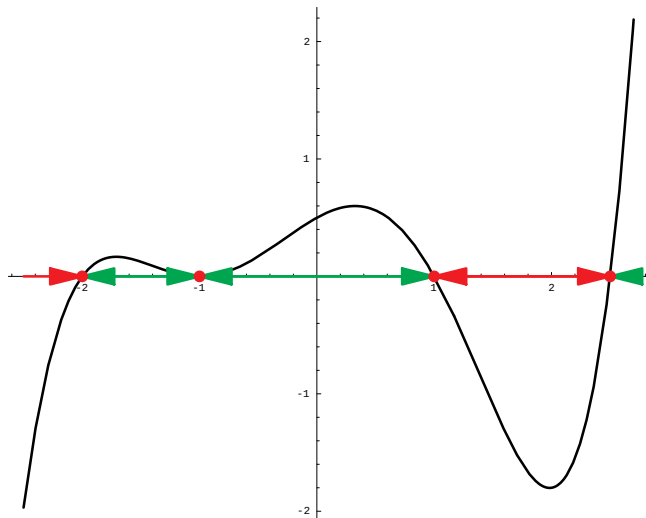
Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 > 0$$



Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 > 0$$

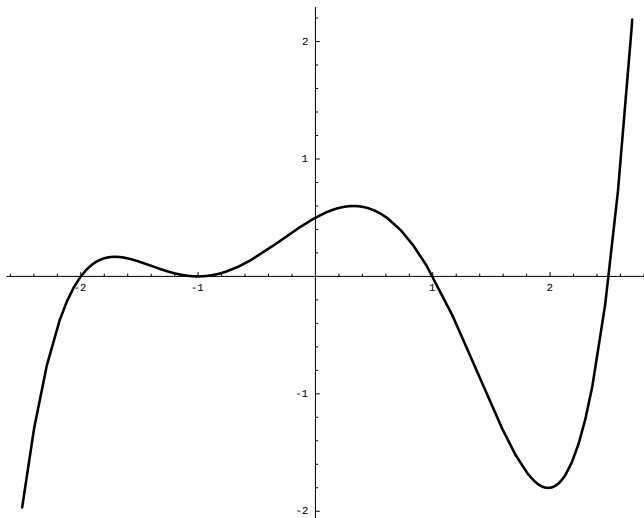


Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 < 0$$

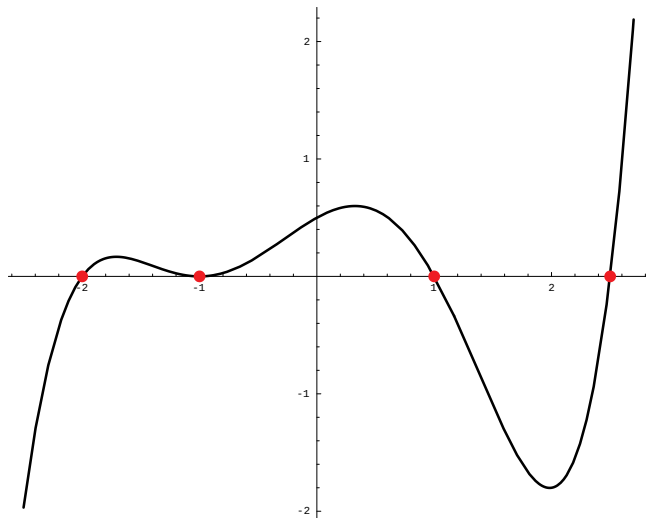
Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 < 0$$



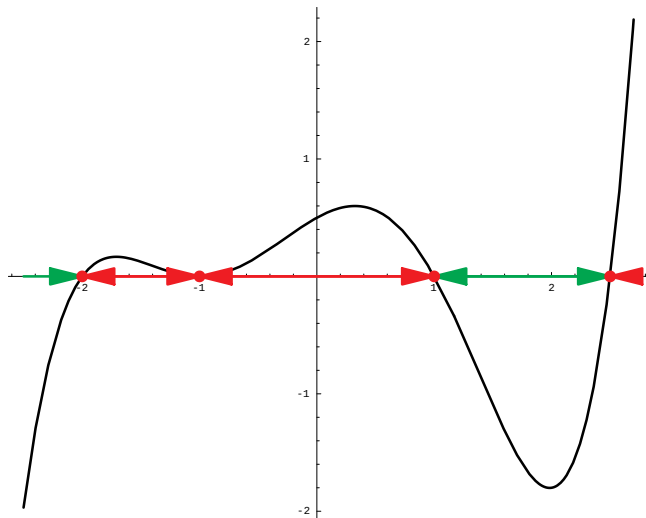
Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 < 0$$



Основная идея

$$\frac{1}{2} + \frac{11}{20}x - \frac{11}{20}x^2 - \frac{13}{20}x^3 + \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{10}x^5 < 0$$



"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \dots, P_k(x)$;

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \dots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \dots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \dots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \dots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \dots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что
 - ▶ для любого i , такого что $0 < i \leq n$, существует j , такое что $0 < i \leq m$ и $x_{i-1} < y_j < x_i$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \dots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \dots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что
 - ▶ для любого i , такого что $0 < i \leq n$, существует j , такое что $0 < i \leq n$ и $x_{i-1} < y_j < x_i$
 - ▶ для любого i , такого что $0 \leq i \leq n$, $y_0 < x_i$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \dots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \dots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что
 - ▶ для любого i , такого что $0 < i \leq n$, существует j , такое что $0 < i \leq n$ и $x_{i-1} < y_j < x_i$
 - ▶ для любого i , такого что $0 \leq i \leq n$, $y_0 < x_i$
 - ▶ для любого i , такого что $0 \leq i \leq n$, $x_i < y_m$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \dots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \dots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что
 - ▶ для любого i , такого что $0 < i \leq n$, существует j , такое что $0 < j \leq n$ и $x_{i-1} < y_j < x_i$
 - ▶ для любого i , такого что $0 \leq i \leq n$, $y_0 < x_i$
 - ▶ для любого i , такого что $0 \leq i \leq n$, $x_i < y_m$
4. ▶ Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если

$$\Phi(y_0) \vee \dots \vee \Phi(y_m)$$

"Алгоритм" Тарского (1-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_1(x), \dots, P_k(x)$; не ограничивая общности мы считаем, что

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$$

3. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{y_0, \dots, y_m\} \supset \mathfrak{N}$ такого, что

- ▶ для любого i , такого что $0 < i \leq n$, существует j , такое что $0 < i \leq n$ и $x_{i-1} < y_j < x_i$
- ▶ для любого i , такого что $0 \leq i \leq n$, $y_0 < x_i$
- ▶ для любого i , такого что $0 \leq i \leq n$, $x_i < y_m$

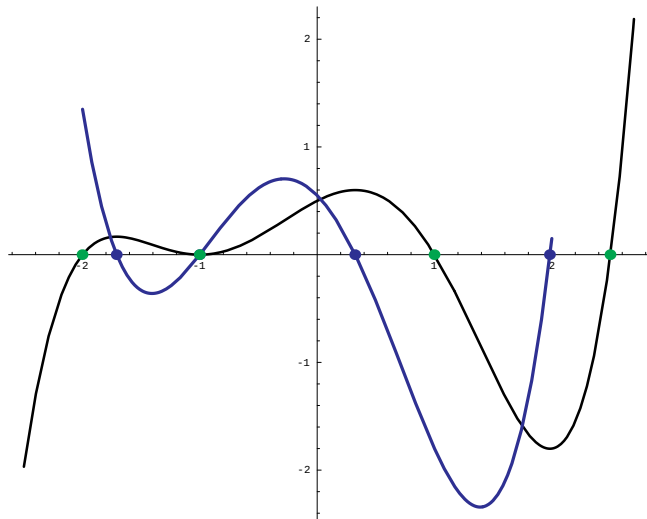
4. ▶ Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если

$$\Phi(y_0) \vee \dots \vee \Phi(y_m)$$

- ▶ Формула $\forall x\Phi(x)$ истинна, если и только если

$$\Phi(y_0) \wedge \dots \wedge \Phi(y_m)$$

Нули производной



"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{x_{-\infty}, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{+\infty}\}$, где $x_{-\infty}$ и $x_{+\infty}$ — такие числа, что $x_{-\infty} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{+\infty}$

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{x_{-\infty}, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{+\infty}\}$, где $x_{-\infty}$ и $x_{+\infty}$ — такие числа, что $x_{-\infty} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{+\infty}$.
5. ▶ Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если

$$\Phi(x_{-\infty}) \vee \Phi(x_0) \vee \dots \vee \Phi(x_n) \vee \Phi(x_{+\infty})$$

"Алгоритм" Тарского (2-я версия) для $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Найти множество $\mathfrak{N} = \{x_0, \dots, x_n\}$, состоящее из всех корней всех многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Расширить множество $\mathfrak{N}$ до множества $\mathfrak{M} = \{x_{-\infty}, x_0, x_1, \dots, x_n, x_{+\infty}\}$, где $x_{-\infty}$ и $x_{+\infty}$ – такие числа, что $x_{-\infty} < x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n < x_{+\infty}$
5.
 - ▶ Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если

$$\Phi(x_{-\infty}) \vee \Phi(x_0) \vee \dots \vee \Phi(x_n) \vee \Phi(x_{+\infty})$$

- ▶ Формула $\forall x\Phi(x)$ истинна, если и только если

$$\Phi(x_{-\infty}) \wedge \Phi(x_0) \wedge \dots \wedge \Phi(x_n) \wedge \Phi(x_{+\infty})$$

Таблица Тарского для многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

		...		...		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
		...		...		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
		...		...		

Таблица Тарского для многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

$T_0(x)$			...		...		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$			...		...		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$			...		...		

Таблица Тарского для многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$x_{-\infty}$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$x_{+\infty}$
$T_0(x)$			$\dots$		$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$			$\dots$		$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$			$\dots$		$\dots$		

Таблица Тарского для многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$x_{-\infty}$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$x_{+\infty}$
$T_0(x)$			$\dots$		$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$			$\dots$	$T_i(x_j)$	$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$			$\dots$		$\dots$		

Таблица Тарского для многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$x_{-\infty}$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$x_{+\infty}$
$T_0(x)$			$\dots$	$T_0(x_j)$	$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$			$\dots$	$T_i(x_j)$	$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$			$\dots$	$T_k(x_j)$	$\dots$		

Таблица Тарского для многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$x_{-\infty}$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$x_{+\infty}$
$T_0(x)$			$\dots$	$T_0(x_j)$	$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$T_i(x_{-\infty})$	$T_i(x_0)$	$\dots$	$T_i(x_j)$	$\dots$	$T_i(x_n)$	$T_i(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$			$\dots$	$T_k(x_j)$	$\dots$		

Таблица Тарского для многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$x_{-\infty}$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$x_{+\infty}$
$T_0(x)$	$T_0(x_{-\infty})$	$T_0(x_0)$	$\dots$	$T_0(x_j)$	$\dots$	$T_0(x_n)$	$T_0(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$T_i(x_{-\infty})$	$T_i(x_0)$	$\dots$	$T_i(x_j)$	$\dots$	$T_i(x_n)$	$T_i(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$T_k(x_{-\infty})$	$T_k(x_0)$	$\dots$	$T_k(x_j)$	$\dots$	$T_k(x_n)$	$T_k(x_{+\infty})$

Таблица Тарского для многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$x_{-\infty}$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$x_{+\infty}$
$T_0(x)$	$T_0(x_{-\infty})$	$T_0(x_0)$	$\dots$	$T_0(x_j)$	$\dots$	$T_0(x_n)$	$T_0(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$T_i(x_{-\infty})$	$T_i(x_0)$	$\dots$	$T_i(x_j)$	$\dots$	$T_i(x_n)$	$T_i(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$T_k(x_{-\infty})$	$T_k(x_0)$	$\dots$	$T_k(x_j)$	$\dots$	$T_k(x_n)$	$T_k(x_{+\infty})$

$$x_{-\infty} < x_0 < \dots < x_j < \dots < x_n < x_{+\infty}$$

Таблица Тарского для многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$x_{-\infty}$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$x_{+\infty}$
$T_0(x)$	$T_0(x_{-\infty})$	$T_0(x_0)$	$\dots$	$T_0(x_j)$	$\dots$	$T_0(x_n)$	$T_0(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$T_i(x_{-\infty})$	$T_i(x_0)$	$\dots$	$T_i(x_j)$	$\dots$	$T_i(x_n)$	$T_i(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$T_k(x_{-\infty})$	$T_k(x_0)$	$\dots$	$T_k(x_j)$	$\dots$	$T_k(x_n)$	$T_k(x_{+\infty})$

$$x_{-\infty} < x_0 < \dots < x_j < \dots < x_n < x_{+\infty}$$

$$\forall j \{0 \leq j \leq n \implies \exists i \{T_i(x) \not\equiv 0 \wedge T_i(x_j) = 0\}\}$$

Таблица Тарского для многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$x_{-\infty}$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$x_{+\infty}$
$T_0(x)$	$T_0(x_{-\infty})$	$T_0(x_0)$	$\dots$	$T_0(x_j)$	$\dots$	$T_0(x_n)$	$T_0(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$T_i(x_{-\infty})$	$T_i(x_0)$	$\dots$	$T_i(x_j)$	$\dots$	$T_i(x_n)$	$T_i(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$T_k(x_{-\infty})$	$T_k(x_0)$	$\dots$	$T_k(x_j)$	$\dots$	$T_k(x_n)$	$T_k(x_{+\infty})$

$$x_{-\infty} < x_0 < \dots < x_j < \dots < x_n < x_{+\infty}$$

$$\forall j \{0 \leq j \leq n \implies \exists i \{T_i(x) \neq 0 \wedge T_i(x_j) = 0\}\}$$

$$\forall i \forall x \{(T_i(x) \neq 0 \wedge T_i(x) = 0) \Rightarrow \exists j \{0 \leq j \leq n \wedge x = x_j\}\}$$

"Алгоритм" Тарского (2-я версия)

"Алгоритм" Тарского (2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.

"Алгоритм" Тарского (2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.

"Алгоритм" Тарского (2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Построить таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.

"Алгоритм" Тарского (2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Построить таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Вычислить логическое значение $\Phi(x_j)$ для каждого столбца таблицы, пользуясь содержимым таблицы:

	$x_{-\infty}$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$x_{+\infty}$
$P_0(x)$	$P_0(x_{-\infty})$	$P_0(x_0)$	$\dots$	$P_0(x_j)$	$\dots$	$P_0(x_n)$	$P_0(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$P_i(x_{-\infty})$	$P_i(x_0)$	$\dots$	$P_i(x_j)$	$\dots$	$P_i(x_n)$	$P_i(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$P_k(x_{-\infty})$	$P_k(x_0)$	$\dots$	$P_k(x_j)$	$\dots$	$P_k(x_n)$	$P_k(x_{+\infty})$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

"Алгоритм" Тарского (2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в бескванторную формулу $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Построить таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Вычислить логическое значение $\Phi(x_j)$ для каждого столбца таблицы, пользуясь содержимым таблицы:

	$x_{-\infty}$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$x_{+\infty}$
$P_0(x)$	$P_0(x_{-\infty})$	$P_0(x_0)$	$\dots$	$P_0(x_j)$	$\dots$	$P_0(x_n)$	$P_0(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$P_i(x_{-\infty})$	$P_i(x_0)$	$\dots$	$P_i(x_j)$	$\dots$	$P_i(x_n)$	$P_i(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$P_k(x_{-\infty})$	$P_k(x_0)$	$\dots$	$P_k(x_j)$	$\dots$	$P_k(x_n)$	$P_k(x_{+\infty})$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

5. Формула $\exists x \Phi(x)$ истинна, если и только если хотя бы одно из этих значений истинно; формула $\forall x \Phi(x)$ истинна, если и только если все эти значения истинны.

таблица Тарского

	$x_{-\infty}$	x_0	...	x_j	...	x_n	$x_{+\infty}$
$T_0(x)$	$T_0(x_{-\infty})$	$T_0(x_0)$	...	$T_0(x_j)$	...	$T_0(x_n)$	$T_0(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$T_i(x_{-\infty})$	$T_i(x_0)$	...	$T_i(x_j)$	...	$T_i(x_n)$	$T_i(x_{+\infty})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$T_k(x_{-\infty})$	$T_k(x_0)$	...	$T_k(x_j)$	...	$T_k(x_n)$	$T_k(x_{+\infty})$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	...	и/л	...	и/л	и/л

Сокращенная таблица Тарского

	$x_{-\infty}$	x_0	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n	$x_{+\infty}$
$T_0(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

Сокращенная таблица Тарского

	$-\infty$			$+\infty$		
$T_0(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л

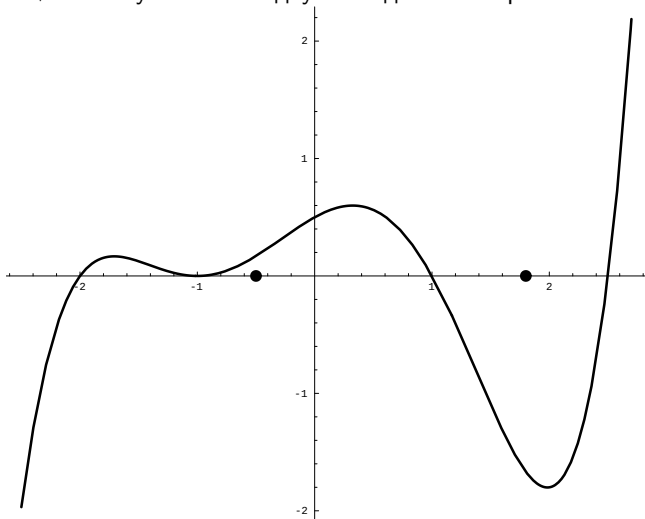
Сокращенная таблица Тарского

	$-\infty$				$+\infty$		
$T_0(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

Лемма. Знаки $-$ и $+$ не могут стоять в двух соседних по горизонтали клетках.

Лемма.

Знаки $-$ и $+$ не могут стоять в двух соседних по горизонтали



"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Построить сокращенную таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Построить сокращенную таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Вычислить логическое значение $\Phi(x)$ для каждого столбца таблицы, пользуясь только содержимым таблицы:

	$-\infty$			$+\infty$		
$P_0(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л

"Алгоритм" Тарского (модифицированная 2-я версия)

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$.
3. Построить сокращенную таблицу Тарского для многочленов $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$.
4. Вычислить логическое значение $\Phi(x)$ для каждого столбца таблицы, пользуясь только содержимым таблицы:

	$-\infty$				$+\infty$		
$P_0(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_i(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_k(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

5. Формула $\exists x \Phi(x)$ истинна, если и только если хотя бы одно из этих значений истинно; формула $\forall x \Phi(x)$ истинна, если и только если все эти значения истинны.

Сокращенная таблица Тарского

	$-\infty$			$+\infty$		
$T_0(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$

Полунасыщенные системы

Определение. Система функций называется **полунасыщенной**, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Полунасыщенные системы

Определение. Система функций называется **полунасыщенной**, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Лемма. Каждую конечную систему многочленов можно расширить до конечной полунасыщенной системы.

Таблица Тарского

	$-\infty$		x_i	x_{i+1}		$+\infty$
$T_0(x)$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- 0 +$	$\dots$	0	0	$\dots$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$

Таблица Тарского

	$-\infty$		x_i	x_{i+1}		$+\infty$
$T_0(x)$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- 0 +$	$\dots$	0	0	$\dots$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$

Лемма. Если система многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$ полунасыщенна и $T_i(x) \not\equiv 0$, то в i -ой строке символ 0 не может стоять в двух соседних клетках.

Насыщенные системы

Определение. Система функций называется **полунасыщенной**, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Насыщенные системы

Определение. Система функций называется **полунасыщенной**, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Определение. Полунасыщенная система многочленов $T_0(x), \dots, T_n(x)$ называется **насыщенной**, если вместе с каждыми двумя многочленами $T_k(x)$ и $T_m(x)$ такими, что $0 < \text{degree}(T_m(x)) \leq \text{degree}(T_k(x))$, она содержит и остаток $R(x)$ от деления $T_k(x)$ на $T_m(x)$.

Насыщенные системы

Определение. Система функций называется **полунасыщенной**, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Определение. Полунасыщенная система многочленов $T_0(x), \dots, T_n(x)$ называется **насыщенной**, если вместе с каждыми двумя многочленами $T_k(x)$ и $T_m(x)$ такими, что $0 < \text{degree}(T_m(x)) \leq \text{degree}(T_k(x))$, она содержит и остаток $R(x)$ от деления $T_k(x)$ на $T_m(x)$.

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + R(x), \quad \text{degree}(R(x)) < \text{degree}(T_m(x))$$

Насыщенные системы

Определение. Система функций называется **полунасыщенной**, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Определение. Полунасыщенная система многочленов $T_0(x), \dots, T_n(x)$ называется **насыщенной**, если вместе с каждыми двумя многочленами $T_k(x)$ и $T_m(x)$ такими, что $0 < \text{degree}(T_m(x)) \leq \text{degree}(T_k(x))$, она содержит и остаток $R(x)$ от деления $T_k(x)$ на $T_m(x)$.

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + R(x), \quad \text{degree}(R(x)) < \text{degree}(T_m(x))$$

Насыщенные системы

Определение. Система функций называется **полунасыщенной**, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Определение. Полунасыщенная система многочленов $T_0(x), \dots, T_n(x)$ называется **насыщенной**, если вместе с каждыми двумя многочленами $T_k(x)$ и $T_m(x)$ такими, что $0 < \text{degree}(T_m(x)) \leq \text{degree}(T_k(x))$, она содержит и остаток $R(x)$ от деления $T_k(x)$ на $T_m(x)$.

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + R(x), \quad \text{degree}(R(x)) < \text{degree}(T_m(x))$$

Лемма. Каждую конечную систему многочленов можно расширить до конечной насыщенной системы.

Насыщенные системы

Определение. Система функций называется **полунасыщенной**, если вместе с каждой функцией она содержит и ее производную.

Определение. Полунасыщенная система многочленов $T_0(x), \dots, T_n(x)$ называется **насыщенной**, если вместе с каждыми двумя многочленами $T_k(x)$ и $T_m(x)$ такими, что $0 < \text{degree}(T_m(x)) \leq \text{degree}(T_k(x))$, она содержит и остаток $R(x)$ от деления $T_k(x)$ на $T_m(x)$.

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + R(x), \quad \text{degree}(R(x)) < \text{degree}(T_m(x))$$

Лемма. Если $T_0(x), \dots, T_{k-1}(x), T_k(x)$ – насыщенная система многочленов, и

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{k-1}(x)) \leq \text{degree}(T_k(x)),$$

то система $T_0(x), \dots, T_{k-1}(x)$ также является насыщенной.

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{k-1}(x)) \leq \text{degree}(T_k(x))$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{k-1}(x)) \leq \text{degree}(T_k(x))$$

Случай $k = 0$: система из одного многочлена $T_0(x)$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{k-1}(x)) \leq \text{degree}(T_k(x))$$

Случай $k = 0$: система из одного многочлена $T_0(x) \equiv 0$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{k-1}(x)) \leq \text{degree}(T_k(x))$$

Случай $k = 0$: система из одного многочлена $T_0(x) \equiv 0$

	$-\infty$	$+\infty$
$T_0(x)$	0	0

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

Случай $\text{degree}(T_1(x)) = \dots = \text{degree}(T_k(x)) = 0$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

Случай $\text{degree}(T_1(x)) = \dots = \text{degree}(T_k(x)) = 0$

	$-\infty$	$+\infty$
$T_0(x)$	0	0
$T_1(x)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$		

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

Случай $\text{degree}(T_1(x)) = \dots = \text{degree}(T_k(x)) = 0$

	$-\infty$	$+\infty$
$T_0(x)$	0	0
$T_1(x)$	- +	- +
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_k(x)$	- +	- +

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			$+\infty$		
$T_0(x)$			...		...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$			...		...	

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$					$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$
$T_k(x)$						

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$					$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$
$T_k(x)$						?

$T_k(x)$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$					$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$
$T_k(x)$						?

$$T_k(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$							$- +$

$$T_k(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$$

$$= p_n x^n \left(1 + \frac{p_{n-1}}{x} + \dots + \frac{p_0}{x^n} \right)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- + $	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- + $
$T_k(x)$	?						$- + $

$$T_k(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$$

$$= p_n x^n \left(1 + \frac{p_{n-1}}{x} + \dots + \frac{p_0}{x^n} \right)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- + $	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- + $
$T_k(x)$	$- + $						$- + $

$$T_k(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$$

$$= p_n x^n \left(1 + \frac{p_{n-1}}{x} + \dots + \frac{p_0}{x^n} \right)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$	$- +$			?			$- +$

$$T_k(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$$

$$= p_n x^n \left(1 + \frac{p_{n-1}}{x} + \dots + \frac{p_0}{x^n} \right)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$	$- +$			?			$- +$

$$T_k(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_0$$

$$= p_n x^n \left(1 + \frac{p_{n-1}}{x} + \dots + \frac{p_0}{x^n} \right)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_m(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	0	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$	$- +$			?			$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_m(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	0	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$	$- +$			?			$- +$

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + T_n(x)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_m(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	0	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$	$- +$			?			$- +$

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + T_n(x)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_m(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	0	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$	$- +$			?			$- +$

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + T_n(x)$$

$$T_k(x_j) = Q(x_j)T_m(x_j) + T_n(x_j)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_m(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	0	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$	$- +$			?			$- +$

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + T_n(x)$$

$$T_k(x_j) = Q(x_j)T_m(x_j) + T_n(x_j) = T_n(x_j)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_m(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	0	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$	$- +$			$- 0 +$			$- +$

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + T_n(x)$$

$$T_k(x_j) = Q(x_j)T_m(x_j) + T_n(x_j) = T_n(x_j)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			x_j			$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_m(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	0	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$	$- +$			$- 0 +$			$- +$

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + T_n(x)$$

$$T_k(x_j) = Q(x_j)T_m(x_j) + T_n(x_j) = T_n(x_j)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_m(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	0	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$	$- +$			$- 0 +$			$- +$

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + T_n(x)$$

$$T_k(x_j) = Q(x_j)T_m(x_j) + T_n(x_j) = T_n(x_j)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	0	0	...	0	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_m(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	0	...	$- 0 +$	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_{k-1}(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$
$T_k(x)$	$- +$	$- 0 +$	...	$- 0 +$	...	$- 0 +$	$- +$

$$T_k(x) = Q(x)T_m(x) + T_n(x)$$

$$T_k(x_j) = Q(x_j)T_m(x_j) + T_n(x_j) = T_n(x_j)$$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			$+\infty$		
$T_0(x)$	0	...	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	$- 0 +$	$- 0 +$	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	$-$	$+$	...	$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$					$+\infty$	
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	$- 0 +$		$- 0 +$	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	$-$	0	$+$	...	$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$					$+\infty$	
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	$- 0 +$	?	$- 0 +$	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	$-$	0	$+$	...	$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	$+$	?	$- 0 +$	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	$-$	0	$+$	...	$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$					$+\infty$	
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	$+$	$+$	$- 0 +$	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	$-$	0	$+$	...	$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	$-$	?	$- 0 +$	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	$-$	0	+	...	$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$				$+\infty$		
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	$-$	$-$	$- 0 +$	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	$-$	0	$+$	...	$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$				$+\infty$		
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	0	?	$- 0 +$	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	$-$	0	$+$	...	$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			$+\infty$			
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	0	?	+	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	-	0	+	...	$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$					$+\infty$	
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	0	+	+	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	-	0	+	...	$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$			$+\infty$			
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	0	?	$-$	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	$-$	0	$+$	...	$- +$

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$					$+\infty$	
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	- +	...	0	-	-	...	- +
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	- +	...	-	0	+	...	- +

Построение сокращенной таблицы Тарского

для насыщенной системы многочленов $T_0(x), \dots, T_k(x)$

	$-\infty$						$+\infty$
$T_0(x)$	0	...	0	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_i(x)$	$- +$	...	0	?	0	...	$- +$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_k(x)$	$- +$	...	$-$	0	$+$	...	$- +$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$
3. Расширить список до насыщенной системы $T_0(x), \dots, T_\ell(x)$ с

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{\ell-1}(x)) \leq \text{degree}(T_\ell(x))$$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$
3. Расширить список до насыщенной системы $T_0(x), \dots, T_\ell(x)$ с

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{\ell-1}(x)) \leq \text{degree}(T_\ell(x))$$

4. Последовательно построить сокращенные таблицы Тарского для многочленов $T_0(x), T_1(x), \dots, T_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, \ell$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$
3. Расширить список до насыщенной системы $T_0(x), \dots, T_\ell(x)$ с

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{\ell-1}(x)) \leq \text{degree}(T_\ell(x))$$

4. Последовательно построить сокращенные таблицы Тарского для многочленов $T_0(x), T_1(x), \dots, T_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, \ell$
5. Вычислить логическое значение $\Phi(x)$ для каждого столбца последней таблицы:

	$-\infty$						
$T_0(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_\ell(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$
3. Расширить список до насыщенной системы $T_0(x), \dots, T_\ell(x)$ с

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{\ell-1}(x)) \leq \text{degree}(T_\ell(x))$$

4. Последовательно построить сокращенные таблицы Тарского для многочленов $T_0(x), T_1(x), \dots, T_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, \ell$
5. Вычислить логическое значение $\Phi(x)$ для каждого столбца последней таблицы:

	$-\infty$						
$T_0(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_\ell(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

6. Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если хотя бы одно из этих значений истинно; формула $\forall x\Phi(x)$ истинна, если и только если все эти значения истинны

Переменных много, но кванторов мало

$$\exists x \{ax + b = 0\}$$

Переменных много, но кванторов мало

$$\exists x \{ax + b = 0\} \iff a \neq 0 \vee b = 0$$

Переменных много, но кванторов мало

$$\exists x \{ax + b = 0\} \iff a \neq 0 \vee b = 0$$

$$\exists x \{ax^2 + bx + c = 0\}$$

Переменных много, но кванторов мало

$$\exists x \{ax + b = 0\} \iff a \neq 0 \vee b = 0$$

$$\begin{aligned} \exists x \{ax^2 + bx + c = 0\} &\iff \\ &\iff ((a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0) \vee (a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0))) \end{aligned}$$

Переменных много, но кванторов мало

$$\exists x \{ax + b = 0\} \iff a \neq 0 \vee b = 0$$

$$\begin{aligned} \exists x \{ax^2 + bx + c = 0\} &\iff \\ &\iff ((a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0) \vee (a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0))) \end{aligned}$$

Теорема Тарского. Для любой формулы языка $\mathcal{A}$ существует эквивалентная ей бескванторная формула этого же языка.

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$
3. Расширить список до насыщенной системы $T_0(x), \dots, T_\ell(x)$ с

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{\ell-1}(x)) \leq \text{degree}(T_\ell(x))$$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$
3. Расширить список до насыщенной системы $T_0(x), \dots, T_\ell(x)$ с

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{\ell-1}(x)) \leq \text{degree}(T_\ell(x))$$

4. Последовательно построить сокращенные таблицы Тарского для многочленов $T_0(x), T_1(x), \dots, T_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, \ell$

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$
3. Расширить список до насыщенной системы $T_0(x), \dots, T_\ell(x)$ с

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{\ell-1}(x)) \leq \text{degree}(T_\ell(x))$$

4. Последовательно построить сокращенные таблицы Тарского для многочленов $T_0(x), T_1(x), \dots, T_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, \ell$
5. Вычислить логическое значение $\Phi(x)$ для каждого столбца последней таблицы:

	$-\infty$						
$T_0(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_\ell(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

Алгоритм Тарского для формулы $Qx\Phi(x)$

1. Составить список $P_1(x), \dots, P_k(x)$ всех многочленов, входящих в $\Phi(x)$ и отличных от тождественного нуля.
2. Добавить многочлен $P_0(x) = (P_1(x) \dots P_k(x))'$
3. Расширить список до насыщенной системы $T_0(x), \dots, T_\ell(x)$ с

$$\text{degree}(T_0(x)) \leq \dots \leq \text{degree}(T_{\ell-1}(x)) \leq \text{degree}(T_\ell(x))$$

4. Последовательно построить сокращенные таблицы Тарского для многочленов $T_0(x), T_1(x), \dots, T_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \dots, \ell$
5. Вычислить логическое значение $\Phi(x)$ для каждого столбца последней таблицы:

	$-\infty$						
$T_0(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_\ell(x)$	$- 0 +$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$\dots$	$- 0 +$	$- 0 +$
$\Phi(x)$	и/л	и/л	$\dots$	и/л	$\dots$	и/л	и/л

6. Формула $\exists x\Phi(x)$ истинна, если и только если хотя бы одно из этих значений истинно; формула $\forall x\Phi(x)$ истинна, если и только если все эти значения истинны

