Что можно делать с вещественными числами и нельзя делать с целыми числами

Часть 2. Десятая проблема Гильберта

Пятая лекция

Ю. В. Матиясевич

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat

Гипотеза Martin'a Davis'a (=DPRM-теорема)

Гипотеза M. Davis'a (DPRM-теорема). *Каждое перечислимое множество является диофантовым.*

Диофантова альтернатива

$$D(x_1, \ldots, x_m) = 0$$

- либо
$$\exists x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) = 0\}$$
- либо
$$\forall x_1 \ldots x_m \{D(x_1, \ldots, x_m) \neq 0\}$$

Вещественные неизвестные

$$
\begin{aligned}
D(\chi_1, \ldots, \chi_m) &= 0 \\
\sin(\pi\chi_1) &= 0 \\
&\vdots \\
\sin(\pi\chi_m) &= 0
\end{aligned}
$$

$$\pi = 3.14159...$$

$$D^2(\chi_1, \ldots, \chi_m) + \sin^2(\pi\chi_1) + \cdots + \sin^2(\pi\chi_m) = 0$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_0$ обозначает класс функций многих вещественных переменных, которые могут быть заданы выражениями, построены из переменных, конкретных натуральных чисел и символа числа π при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции sin *в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции $\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ из класса $\mathcal{F}_0$ распознавал, имеет ли уравнение*

$$\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m) = 0$$

решение в вещественных числах.

Только натуральные коэффициенты

$$\sin(\psi) = 0 \qquad 2 \le \psi \le 4$$

$$\begin{aligned} & D^2(\chi_1, \dots, \chi_m) + \\ & \quad \sin^2(\psi\chi_1) + \dots + \sin^2(\psi\chi_m) + \\ & \qquad \sin^2(\psi) + (1 - (\psi - 3)^2 - \zeta^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_1$ *обозначает класс функций многих вещественных переменных, которые могут быть заданы выражениями, построеными из переменных, конкретных натуральных чисел при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции* sin *в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции* $\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ *из класса* $\mathcal{F}_1$ *распознавал, имеет ли уравнение*

$$\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m) = 0$$

решение в вещественных числах.

Альтернативы

$$\begin{array}{l|l} \exists x_1 \dots x_m \{D(x_1,\dots,x_m) = 0\} & \exists \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1,\dots,\chi_m) = 0\} \\ \forall x_1 \dots x_m \{D(x_1,\dots,x_m) \neq 0\} & \forall \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1,\dots,\chi_m) \neq 0\} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \exists x_1 \dots x_m \{2D^2(x_1,\dots,x_m) = 0\} & \exists \chi_1 \dots \chi_m \{\Psi(\chi_1,\dots,\chi_m) = 0\} \\ \forall x_1 \dots x_m \{2D^2(x_1,\dots,x_m) > 1\} & \forall \chi_1 \dots \chi_m \{\Psi(\chi_1,\dots,\chi_m) > 1\} \end{array}$$

$$\Phi(\chi_1,\dots,\chi_m) = \bigl(B^2(\chi_1,\dots,\chi_m) + 1\bigr)\bigl(D^2(\chi_1,\dots,\chi_m) + \sin^2(\pi\chi_1) + \dots + \sin^2(\pi\chi_m)\bigr)$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_0$ *по-прежнему обозначает класс функций многих вещественных переменных, которые могут быть заданы выражениями, построеными из переменных, конкретных натуральных чисел и символа числа* π *при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции* sin *в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции* $\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ *из класса* $\mathcal{F}_0$ *распознавал, имеет ли неравенство*

$$\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m) < 1$$

решение в вещественных числах.

Случай одной переменной

$$\begin{aligned} A(\chi) &= \chi \sin(\chi) \\ B(\chi) &= \chi \sin(\chi^3) \end{aligned}$$

Лемма. *Для любых вещественных чисел α и β и любого положительного числа ϵ найдется вещественное число χ такое, что*

$$\begin{aligned} |A(\chi) - \alpha| &< \epsilon \\ B(\chi) - \beta &= 0 \end{aligned}$$

Не ограничивая общности считаем, что $\epsilon < 1$

Случай одной переменной

Доказательство. Найдем в интервале $[2K\pi - \frac{\pi}{2}, 2K\pi + \frac{\pi}{2}]$ число χ_0 такое, что

$$A(\chi_0) = \alpha$$

Найдем положительное δ такое, что

$$|\chi - \chi_0| < \delta \Rightarrow |A(\chi) - \alpha| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}
|A(\chi) - \alpha| &= |A(\chi) - A(\chi_0)| \\
&= |A'(\chi^*)(\chi - \chi_0)| \qquad \text{где} \ \ |\chi^* - \chi_0| < \delta \\
&= |(\sin(\chi^*) + \chi^* \cos(\chi^*))(\chi - \chi_0)| \\
&< (1 + |\chi_0| + \delta)\delta \\
&< (2K\pi + 3)\delta \\
&< \epsilon \qquad \text{при} \ \ \delta = \frac{\epsilon}{2K\pi + 3}
\end{aligned}$$

Случай одной переменной

$$
\begin{aligned}
(\chi_0+\delta)^3-(\chi_0-\delta)^3 &= 6\chi_0^2\delta+2\delta^3 \\
&> \frac{6(2K\pi-\frac{\pi}{2})^2\epsilon}{2K\pi+3} \\
&> 2\pi \qquad \text{при достаточно большом} \quad K
\end{aligned}
$$

$$B(\chi)=\beta$$

$$|A(\chi)-\alpha|<\epsilon$$

Случай одной переменной

Лемма. *Для любых вещественных чисел* α *и* β *и любого положительного числа* ϵ *найдется вещественное число* χ *такое, что* $|A(\chi) - \alpha| < \epsilon,\ B(\chi) = \beta$.

$$|A(C_\epsilon(\alpha, \beta)) - \alpha| < \epsilon \qquad B(C_\epsilon(\alpha, \beta)) = \beta$$

$$A_k(\chi) = A\ \underbrace{(B(\dots B}_{(k-1)\ \text{раз}}\ (\chi)\dots))$$

Лемма. *Для любых вещественных чисел* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *и любого положительного числа* ϵ

$$|A_k(\chi) - \alpha_k| \ < \ \epsilon \qquad k = 1, \dots, n$$

где

$$\chi = C_\epsilon(\alpha_1, C_\epsilon(\alpha_2, \dots, C_\epsilon(\alpha_k, 0)\dots))$$

Случай одной переменной

- либо

$$\exists \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) = 0\}$$

- либо

$$\forall \chi_1 \dots \chi_m \{\Phi(\chi_1, \dots, \chi_m) > 1\}$$

$$\Psi(\chi) = \Phi(A_1(\chi), A_2(\chi), \dots, A_m(\chi))$$

- либо

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \chi \{\Psi(\chi) < \epsilon\}$$

- либо

$$\forall \chi \{\Psi(\chi) \geq 1\}$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_0^1$ *обозначает класс функций одной вещественной переменной, которые могут быть заданы выражениями, построеными из переменной, конкретных натуральных чисел и символа числа* π *при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции* sin *в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции* $\Phi(\chi)$ *из класса* $\mathcal{F}_0^1$ *распознавал, имеет ли неравенство*

$$\Phi(\chi) < 1$$

решение в вещественных числах.

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_0^1$ обозначает класс функций одной вещественной переменной, которые могут быть заданы выражениями, построеными из переменной, конкретных натуральных чисел и символа числа π при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции sin *в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции $\Phi(\chi)$ из класса $\mathcal{F}_0^1$ распознавал, имеет ли уравнение*

$$2\Phi(\chi) = 1$$

решение в вещественных числах.

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_1^1$ *обозначает класс функций одной вещественной переменной, которые могут быть заданы выражениями, построеными из переменной, конкретных натуральных чисел при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функции* sin *в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции* $\Phi(\chi)$ *из класса* $\mathcal{F}_1^1$ *распознавал, имеет ли уравнение*

$$2\Phi(\chi) = 1$$

решение в вещественных числах.

Тождества

- либо

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \chi \{ \Psi(\chi) < \epsilon \}$$

- либо

$$\forall \chi \{ \Psi(\chi) \geq 1 \}$$

- либо

$$\exists \chi \{ 1 - \Psi(\chi) + |1 - \Psi(\chi)| \neq 0 \}$$

- либо

$$\forall \chi \{ 1 - \Psi(\chi) + |1 - \Psi(\chi)| = 0 \}$$

Следствие DPRM-теоремы

Пусть $\mathcal{F}_2^1$ *обозначает класс функций одной вещественной переменной, которые могут быть заданы выражениями, построеными из переменной, конкретных натуральных чисел и символа числа* π *при помощи композиции операций сложения, вычитания и умножения и функций* sin *и* $|\ |$ *(абсолютная величина) в произвольном порядке. Не существует алгоритма, который по произвольной фунции* $\Phi(\chi_1, \ldots, \chi_m)$ *из класса* $\mathcal{F}_2^1$ *распознавал, справедливо ли равенство*

$$2\Phi(\chi) = 1$$

при всех вещественных значениях χ*.*

Снова полиномиальные уравнения

$\tau \in [0, 1]$

$$\Upsilon'(\tau) = 0$$

$$\Pi'(\tau) = 0 \qquad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(\tau) = A \sin\big(\Pi(\tau)\tau\big) + B \cos\big(\Pi(\tau)\tau\big)$$

$$\begin{aligned} \Phi(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = 0 \\ \Phi'(0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad A \neq 0 \\ \Phi(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Pi(\tau) = n\pi \\ 3 \leq \Pi(0) \leq 4 \quad &\Rightarrow \quad \Pi(\tau) = \pi \end{aligned}$$

В любом решении этой системы дифференциальных уравнений функция $\Pi(\tau)$ является константой – числом π, и существует

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \qquad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$
$$\Phi(0) = 0 \qquad \Phi'(0) = 1 \qquad \Phi(1) = 0 \qquad 3 \le \Pi(0) \le 4$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \qquad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(\tau) = A\sin\big(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau\big) + B\cos\big(\Pi(\tau)\Upsilon(\tau)\tau\big)$$

$$\begin{aligned}
\Psi(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = 0 \\
\Psi'(0) = \Pi(\tau)\Upsilon(\tau) \quad &\Rightarrow \quad \Upsilon(\tau) = 0 \text{ или } \ A \neq 0 \\
\Psi(1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Pi(\tau)\Upsilon(\tau) = n\pi \\
&\Rightarrow \quad \Upsilon(\tau) = n
\end{aligned}$$

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \qquad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(0) = 0 \qquad \Phi'(0) = 1 \qquad \Phi(1) = 0 \qquad 3 \leq \Pi(0) \leq 4$$

$$\Upsilon'(\tau) = 0 \qquad \Psi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon^2(\tau)\Psi(\tau) = 0$$

$$\Psi(0) = 0 \qquad \Psi'(0) = \Pi(\tau)\Upsilon(\tau) \qquad \Psi(1) = 0$$

В любом решении этой системы дифференциальных уравнений функция $\Upsilon(\tau)$ является константой – некоторым целым числом, и для любого целого числа n существует решение, в котором фукция $\Upsilon(\tau)$ тождественно равна этому числу n.

Снова полиномиальные уравнения

$$\Pi'(\tau) = 0 \qquad \Phi''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Phi(\tau) = 0$$

$$\Phi(0) = 0 \qquad \Phi'(0) = 1 \qquad \Phi(1) = 0 \qquad 3 \le \Pi(0) \le 4$$

$$\Upsilon_1'(\tau) = 0 \qquad \Psi_1''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_1^2(\tau)\Psi_1(\tau) = 0$$

$$\dots$$

$$\Upsilon_m'(\tau) = 0 \qquad \Psi_m''(\tau) + \Pi^2(\tau)\Upsilon_m^2(\tau)\Psi_m(\tau) = 0$$

$$\dots$$

$$\Psi_1(0) = 0 \qquad \Psi_1'(0) = \Pi(\tau)\Upsilon_1(\tau) \qquad \Psi_m(1) = 0$$

$$\dots$$

$$\Psi_m(0) = 0 \qquad \Psi_m'(0) = \Pi(\tau)\Upsilon_m(\tau) \qquad \Psi_m(1) = 0$$

$$D\big(\Upsilon_1(\tau), \dots, \Upsilon_m(\tau)\big) = 0$$

Снова полиномиальные уравнения

$$3 \leq \Pi(0) \leq 4 \iff 3 + \Delta_1^2(0) = \Pi(0) \ \& \ \Pi(0) + \Delta_2^2(0) = 4$$

$$\Delta(\alpha) = \beta \iff \Delta(\tau) - \beta = (\tau - \alpha)\Omega(\tau)$$

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольной системе дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{aligned}
P_1\big(\tau, \Phi_1(\tau), \ldots, \Phi_k(\tau), \Phi_1'(\tau)\big) &= 0 \\
&\vdots \\
P_k\big(\tau, \Phi_1(\tau), \ldots, \Phi_k(\tau), \Phi_k'(\tau)\big) &= 0,
\end{aligned}
$$

где P_1, *...*, P_k *– многочлены с целыми коэффициентами, узнавать, имеет ли эта система решение на интервале* $[0, 1]$*.*

Следствие (трудное) DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по дифференциальному уравнению вида

$$P\big(\tau, \Phi(\tau), \Phi'(\tau), \ldots, \Phi^{\langle n\rangle}(\tau)\big) \quad = 0$$

где P – многочлен с целыми коэффициентами, узнавать, имеет ли это уравнение решение на интервале $[0, 1]$.

Формальные степенные ряды

$$\Psi(\tau) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^k$$

$$\Psi'(\tau) = 0, \qquad \tau\Phi'(\tau) = \Psi(\tau)\Phi(\tau)$$

$$\tau\Phi'(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} k\phi_k \tau^k = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_0 \phi_k \tau^k$$

$$k\phi_k = \psi_0 \phi_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Вырожденное решение: $\forall k \quad \phi_k = 0$
Невырожденное решение:

$$\exists k \quad \phi_k \neq 0 \;\Rightarrow\; \psi_0 = k$$

Формальные степенные ряды

$$
\begin{aligned}
\Psi_1'(\tau) &= 0, \\
\tau\Phi_1'(\tau) &= \Psi_1(\tau)\Phi_1(\tau), \\
&\vdots \\
\Psi_m'(\tau) &= 0, \\
\tau\Phi_m'(\tau) &= \Psi_m(\tau)\Phi_m(\tau), \\
D(\Psi_1(\tau), \ldots, \Psi_m(\tau)) &= 0
\end{aligned}
$$

$$\Phi_1(\tau)\ldots\Phi_m(\tau) \not\equiv 0$$

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольной системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} P_1\big(\tau, \Phi_1(\tau), \dots, \Phi_k(\tau), \Phi_1'(\tau)\big) &= 0, \\ &\vdots \\ P_k\big(\tau, \Phi_1(\tau), \dots, \Phi_k(\tau), \Phi_k'(\tau)\big) &= 0, \end{aligned}$$

где P_m – многочлены с целыми коэффициентами узнавать, имеет ли эта система решение в виде формального степенного ряда, удовлетворяющего также условию

$$\Phi_1(\tau) \not\equiv 0.$$

Сходящиеся степенные ряды

$$\Psi'(\tau) = 0$$
$$\tau^2\Phi'(\tau) - (\Psi(\tau)\tau + 1)\Phi(\tau) + 1 = 0$$

$$-\phi_0 + 1 = 0$$

$$-\psi_0\phi_0 - \phi_1 = 0$$

$$(k-1)\phi_{k-1} - \psi_0\phi_{k-1} - \phi_k = 0, \quad k > 1$$

$$\phi_0 = 1 \quad \phi_k = -\psi_0(1-\psi_0)(2-\psi_0)\dots(k-1-\psi_0).$$

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольной системе дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} P_1\big(\tau, \Phi_1(\tau), \ldots, \Phi_k(\tau), \Phi_1'(\tau)\big) &= 0, \\ &\vdots \\ P_k\big(\tau, \Phi_1(\tau), \ldots, \Phi_k(\tau), \Phi_k'(\tau)\big) &= 0, \end{aligned}$$

где P_m – многочлены с целыми коэффициентами узнавать, имеет ли эта система решение в виде сходящихся степенных рядов

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \dots, y_m) = 0$$

$$\Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{y_1, \dots, y_m = 0}^{\infty} \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m}$$

$$\left(\tau_k \frac{\partial}{\partial \tau_k} \right) \tau_k^{y_k} = y_k \tau_k^{y_k}$$

$$D\left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m} \right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) =$$

$$= \textstyle\sum_{y_1, \dots, y_m = 0}^{\infty} D(y_1, \dots, y_m) \psi_{y_1, \dots, y_m} \tau_1^{y_1} \dots \tau_m^{y_m}$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=\sum_{y_1,\ldots,y_m=0}^{\infty}\tau_1^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m}\qquad(*)$$

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=$$
$$=\sum\nolimits_{y_1,\ldots,y_m=0}^{\infty}D(y_1,\ldots,y_m)\psi_{y_1,\ldots,y_m}\tau_1^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m}$$

$$\psi_{y_1,\ldots,y_m}=\frac{1}{D(y_1,\ldots,y_m)}$$

Дифференциальное уравнение (*) имеет решение в том и только том случае, когда диофантово уравнение $D(y_1,\ldots,y_m)=0$ решений не имеет

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\dots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\dots,\tau_m)=\sum_{y_1,\dots,y_m=0}^{\infty}\tau_1^{y_1}\dots\tau_m^{y_m}\qquad(*)$$

$$(1-\tau_1)\dots(1-\tau_m)D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\dots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\dots,\tau_m)=1\qquad(**)$$

Дифференциальные уравнения (*) и (**) имеют решения в том и только том случае, когда диофантово уравнение $D(y_1,\dots,y_m)=0$ решений не имеет

Следствие DPRM-теоремы

Не существует алгоритма, который позволял бы по произвольному многочлену Q с целыми коэффициентами узнавать, имеет ли дифференциальное уравнение в частных производных

$$Q\left(\tau_1, \ldots, \tau_m, \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \ldots, \tau_m) = 1$$

решение в виде формального степенного ряда.

Уравнения в частных производных

$$a \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow \exists x_2 \dots x_m \{D(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

$$(1-\tau_2)\dots(1-\tau_m)\, D\left(\tau_1 \tfrac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \tfrac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \tfrac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \\ = \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \frac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$$

$$\Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k \tau_1^k$$

$$D\left(\tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \dots, \tau_m \frac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \dots, \tau_m) = \frac{\Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)}{(1-\tau_2)\dots(1-\tau_m)}$$

Уравнения в частных производных

$$D\left(\tau_1\frac{\partial}{\partial\tau_1},\ldots,\tau_m\frac{\partial}{\partial\tau_m}\right)\Psi(\tau_1,\ldots,\tau_m)=$$

$$=\quad\frac{\Phi(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_m)}{(1-\tau_2)\ldots(1-\tau_m)}$$

$$=\quad\sum_{k=0}^{\infty}\phi_k\tau_1^k\sum_{y_2,\ldots,y_m}\tau_2^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m}$$

$$=\quad\sum_{y_1,\ldots,y_m=0}^{\infty}D(y_1,\ldots,y_m)\psi_{y_1,\ldots,y_m}\tau_1^{y_1}\ldots\tau_m^{y_m}$$

$$D(y_1,\ldots,y_m)\psi_{y_1,\ldots,y_m}=\phi_{y_1}$$

Уравнения в частных производных

$$D(y_1, \ldots, y_m)\psi_{y_1,\ldots,y_m} = \phi_{y_1}$$

$$y_1 \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \phi_{y_1} = 0$$

$$D(y_1, \ldots, y_m) \neq 0 \;\Rightarrow\; \psi_{y_1,\ldots,y_m} = \frac{\phi_{y_1}}{D(y_1, \ldots, y_m)}$$

Уравнения в частных производных

$$n = 1, 2$$

$$a \in \mathfrak{M}_n \Longleftrightarrow \exists x_2 \dots x_m \{D_n(a, x_2, \dots, x_m) = 0\}$$

$$(1-\tau_2)\dots(1-\tau_m)\, D_n\left(\tau_1 \tfrac{\partial}{\partial \tau_1}, \tau_2 \tfrac{\partial}{\partial \tau_2}, \dots, \tau_m \tfrac{\partial}{\partial \tau_m}\right) \Psi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) =$$
$$= \Phi_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial \tau_2} \Phi_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \dots = \tfrac{\partial}{\partial \tau_m} \Phi_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = 0$$

$$\Phi_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{n,k} \tau_1^k \qquad a \in \mathfrak{M}_n \Longrightarrow \phi_{n,a} = 0$$

Уравнения в частных производных

$$\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{1,k}\tau_1^k \qquad a \in \mathfrak{M}_1 \Longrightarrow \phi_{1,a} = 0$$

$$\Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{2,k}\tau_1^k \qquad a \in \mathfrak{M}_2 \Longrightarrow \phi_{2,a} = 0$$

$$(1 - \tau_1)\big(\Phi_1(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) + \Phi_2(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)\big) = 1$$

$$\phi_{1,a} + \phi_{2,a} = 1, \qquad a = 0, 1, \dots$$

$$\mathfrak{M} = \{a \mid \phi_{1,a} = 0\}$$

$$a \in \mathfrak{M}_1 \Longrightarrow \phi_{1,a} = 0 \Longrightarrow a \in \mathfrak{M}$$

$$a \in \mathfrak{M}_2 \Longrightarrow \phi_{2,a} = 0 \Longrightarrow \phi_{1,a} = 1 \Longrightarrow a \notin \mathfrak{M}$$

Диофантовы игры

Правила

James Jones [1974], основываясь на идеях M. Rabin'a [1957], ввел *диофантовы игры*.

$$P(a_1, \ldots, a_m, x_1, \ldots, x_m) = 0$$

*П*етр выбирает значения *п*араметров $a_1, \ldots, a_m$
*Н*иколай выбирает значения *н*еизвестных $x_1, \ldots, x_m$

- Петр выбирает a_1
- Николай выбирает x_1
- Петр выбирает a_2
- Николай выбирает x_2
- ....
- Петр выбирает a_m
- Николай выбирает x_m

Николай объявляется победителем в том и только том случае, когда значение многочлена оказывается равным нулю.

Упражнение. *Кто имеет выигрышную стратегию в игре, задаваемой уравнением*

$$(x_1 + a_2)^2 + 1 - (x_2 + 2)(x_3 + 3) = 0?$$

Подсказка. Победа гарантирована Петру в том и только том случае, когда количество простых чисел вида $n^2 + 1$ бесконечно.

Теорема (Jones[1982]) *Николай имеет выигрышную стратегию, но не имеет вычислимой выигрышной стратегии в игре*

$$\Bigg\{\{a_1 + a_6 + 1 - x_4\}^2 \cdot \Big\{\big\langle(a_6 + a_7)^2 + 3a_7 + a_6 - 2x_4\big\rangle^2$$
$$+ \Big\langle\Big[(x_9 - a_7)^2 + (x_{10} - a_9)^2\Big]\Big[(x_9 - a_6)^2 + (x_{10} - a_8)^2((x_4 - a_1)^2$$
$$+ (x_{10} - a_9 - x_1)^2)\Big]\Big[(x_9 - 3x_4)^2 + (x_{10} - a_8 - a_9)^2\Big]\Big[(x_9 - 3x_4 - 1)^2$$
$$+ (x_{10} - a_8 a_9)^2\Big] - a_{12} - 1\Big\rangle^2 + \big\langle[x_{10} + a_{12} + a_{12}x_9 a_4 - a_3]^2$$
$$+ [x_5 + a_{13} - x_9 a_4]^2\big\rangle\Big\} - x_{13} - 1\Bigg\}\{a_1 + x_5 + 1 - a_5\}\Bigg\{\big\langle(x_5 - x_6)^2$$
$$+ 3x_6 + x_5 - 2a_5\big\rangle^2 + \Big\langle\Big[(a_{10} - x_6)^2 + (a_{11} - x_8)^2\Big]\Big[(a_{10} - x_5)^2$$
$$+ (a_{11} - x_7)^2((a_5 - a_1)^2 + (a_{11} - x_8 - a_2)^2)\Big]\Big[(a_{10} - 3a_5)^2$$
$$+ (a_{11} - x_7 - x_8)^2\Big]\Big[(a_{10} - 3a_5 - 1)^2 + (a_{11} - x_7 x_8)^2\Big] - x_{11} - 1\Big\rangle^2$$
$$+ \big\langle[a_{11} + x_{11} + x_{11}a_{10}x_3 - x_2]^2 + [a_{11} + x_{12} - a_{10}x_3]^2\big\rangle\Bigg\} = 0.$$

Формализмы для описания параллельных/распределенных вычислений

Сети Петри (Petri net, place/transition net, P/T net)

Wikipedia: Petri nets were invented by Carl Adam Petri in August 1939 – at the age of 13 – for the purpose of describing chemical processes

Системы векторного сложения (systems of vector addition)

Системы векторного сложения

$$\Delta_1 = \langle \delta_{1,1}, \ldots, \delta_{1,n} \rangle$$

$$\vdots \qquad\qquad \delta_{j,k} \in \mathbb{Z}$$

$$\Delta_k = \langle \delta_{k,1}, \ldots, \delta_{k,n} \rangle$$

$$\alpha_1 \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

$$A = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \to \langle \alpha_1 + \delta_{j,1}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \rangle = A + \Delta_j$$

$$\alpha_1 + \delta_{j,1} \in \mathbb{N}, \ldots, \alpha_n + \delta_{j,n} \in \mathbb{N}$$

$$A \to A + \Delta_{j_1} \to A + \Delta_{j_1} + \Delta_{j_2} \to A + \Delta_{j_1} + \Delta_{j_2} + \Delta_{j_3} \to \ldots$$

Проблема достижимости

ВХОД: Система векторного сложения $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и два вектора A и B

ВОПРОС: Верно ли, что вектор B достижим из вектора A в этой системе?

Проблема включения

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ и $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ и вектор A

ВОПРОС: Верно ли, что каждый вектор, достижимый из вектора A во второй системе, достижим из вектора A также и в первой системе?

Теорема (Michael Rabin, не опубликовано). *Проблема включения для систем векторного сложения неразрешима.*

Проблема эквивалентности

ВХОД: Две системы векторного сложения $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k\}$ и $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ и вектор A

ВОПРОС: Верно ли, что каждый вектор, достижимый из вектора A в одной из этих систем, достижим из вектора A также и в другой системе?

Теорема (M. Hack; T. Araki и T. Kasami). *Проблема эквивалентности для систем векторного сложения неразрешима.*