Дескрипционная логика $\mathcal{ALC}$: терминологическая часть

База знаний (KB)

TBox (терминология, схема)

$$\mathrm{Man} \equiv \mathrm{Human} \sqcap \mathrm{Male}$$
$$\mathrm{HappyFather} \equiv \mathrm{Man} \sqcap \exists \mathrm{hasChild}$$
...

ABox (assertion box, данные)

$$\mathrm{john}: \mathrm{Man}$$
$$(\mathrm{john}, \mathrm{mary}): \mathrm{hasChild}$$
...

Система анализа

Интерфейс

Синтаксис $\mathcal{ALC}$

- **Язык описания $\mathcal{ALC}$-концептов (классов)**
  - имена концептов $\boldsymbol{A_0}$, $\boldsymbol{A_1}$, ...
  - имена ролей $\boldsymbol{r_0}$, $\boldsymbol{r_1}$, ...
  - концепт $\top$ (часто называют “вещь”)
  - концепт $\bot$ (пустой класс)
  - логическая связка $\sqcap$ (пересечение, конъюнкция, “и”).
  - квантор $\exists$ (существование).
  - квантор $\forall$ (часто называют ограничение значения (value restriction)).
  - логическая связка $\sqcup$ (объединение, дизъюнкция,“или”).
  - логическая связка $\neg$ (дополнение, отрицание).

$\mathcal{ALC}$

$\mathcal{ALC}$-концепты определяются индуктивно следующим образом:

- Все имена концептов, $\top$ и $\bot$ являются $\mathcal{ALC}$-концептами;
- Если C является$\mathcal{ALC}$-концептом, то и $\neg C$ является $\mathcal{ALC}$-концептом.
- Если C и D являются $\mathcal{ALC}$-концептами, а r — имя роли, то

$$(C \sqcap D), \quad (C \sqcup D), \quad \exists r.C, \quad \forall r.C$$

являются $\mathcal{ALC}$-концептами.

$\mathcal{ALC}$ импликация концептов имеет вид

$$C \sqsubseteq D,$$

где C, D являются $\mathcal{ALC}$-концептами.

Пример

- **Person** $\sqcap$ $\forall$**hasChild.Male** (у кого дети мужского пола);
- $\exists$**interested_in.Computer_Science** $\sqcap$ $\neg\exists$**interested_in.Philosophy** (класс объектов интересующихся информатикой, но с интересом в философии);
- **Living_being** $\sqcap$ $\neg$**Human_being** (живые существа не являющиеся людьми);
- **Student**$\sqcap\neg\exists$**interested_in.Mathematics** (студенты, не интересующиеся математикой);
- **Student** $\sqcap$ $\forall$**drinks.tea** (студенты, которые пьют только чай).
- **Person** $\sqcap$ $\forall$**hasChild.Male** $\sqcap$ $\exists$**hasChild.**$\top$ (класс объектов, у которых есть ребенок, чьи все дети мужского пола).

Семантика $\mathcal{ALC}$

Интерпретация определяется также как и для $\mathcal{EL}$

- Структура $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ в которой
  - $\Delta^{\mathcal{I}}$ **носитель** (непустое множество)
  - $\cdot^{\mathcal{I}}$ **интерпретация**, отображающая
    * имя концепта A в подмножество $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ $(A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}})$
    * имя роли r в бинарное отношение $r^{\mathcal{I}}$ на $\Delta^{\mathcal{I}}$ $(r^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}})$

- Интерпретация **сложных концептов** в $\mathcal{I}$:

(C, D — концепты, а r — имя роли)

  - $(\top)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$ и $(\bot)^{\mathcal{I}} = \emptyset$
  - $(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$
  - $(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}$ и $(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}$
  - $(\forall r.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid$ для всех $y \in \Delta^{\mathcal{I}}$ $((x, y) \in r^{\mathcal{I}} \rightarrow y \in C^{\mathcal{I}})\}$
  - $(\exists r.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid$ существует $y \in \Delta^{\mathcal{I}}$ such that $(x, y) \in r^{\mathcal{I}}$ и $y \in C^{\mathcal{I}}\}$

Эквивалентные концепты

Для любой интерпретации $\mathcal{I}$, любых концептов C, D и имени роли r следующее имеет место:

- $(\neg\neg C)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}}$;
- $(\forall r.C)^{\mathcal{I}} = (\neg\exists r.\neg C)^{\mathcal{I}}$;
- $(\neg(C \sqcap D))^{\mathcal{I}} = (\neg C \sqcup \neg D)^{\mathcal{I}}$;
- $(\neg(C \sqcup D))^{\mathcal{I}} = (\neg C \sqcap \neg D)^{\mathcal{I}}$;
- $(\neg\exists r.C)^{\mathcal{I}} = (\forall r.\neg C)^{\mathcal{I}}$;
- $(\neg\forall r.C)^{\mathcal{I}} = (\exists r.\neg C)^{\mathcal{I}}$;
- $(C \sqcap \neg C)^{\mathcal{I}} = \bot^{\mathcal{I}} = \emptyset$;
- $(C \sqcup \neg C)^{\mathcal{I}} = \top^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}$.

Импликации концептов и TBox

- **Импликация $\mathcal{ALC}$-концептов** это выражение

$$C \sqsubseteq D,$$

  где C и D являются $\mathcal{ALC}$-концептами.

- **$\mathcal{ALC}$-TBox** есть конечное множество импликаций $\mathcal{ALC}$-концептов.

Семантика: так же как в $\mathcal{EL}$

$\mathcal{I}$ — интерпретация, $C \sqsubseteq D$ — импликация $\mathcal{ALC}$-концептов и T — $\mathcal{ALC}$-TBox.

- $\mathcal{I} \models C \sqsubseteq D$ т. и т.т., когда $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$.
- $\mathcal{I} \models T$ т. и т.т., когда $\mathcal{I} \models E \sqsubseteq F$ для всех $E \sqsubseteq F$ в T.

Логический анализ в $\mathcal{ALC}$ (пока без TBox)

- **Поглощение**. $C \sqsubseteq D$ следует из пустого TBox (или C поглощен D) т. и т.т., когда в любой интерпретации $\mathcal{I}$ мы имеем $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$.
  В таком случае, мы пишем $\emptyset \models C \sqsubseteq D$.

- **Реализуемость концепта**. Концепт C **реализуем** т. и т.т., когда существует интерпретаци
  $\mathcal{I}$ т.ч. $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$.

$\emptyset \models C \sqsubseteq D$ т. и т.т., когда $C \sqcap \neg D$ не реализуем. Таким образом, в $\mathcal{ALC}$ поглощение и реализуемость сводятся к друг-другу.

Заметим, что любой $\mathcal{EL}$-концепт реализуем.

Пример 1

Q: Реализуем ли $\boxed{(\forall \mathsf{hasChild}.\mathsf{Male}) \sqcap (\exists \mathsf{hasChild}.\neg \mathsf{Male})}$?

Попробуем построить реализующую **интерпретацию**

(1)		x: $(\forall \mathsf{hasChild}.\mathsf{Male}) \sqcap (\exists \mathsf{hasChild}.\neg \mathsf{Male})$
(2)	из (1)	x: $\forall \mathsf{hasChild}.\mathsf{Male}$
(3)	из (1)	x: $\exists \mathsf{hasChild}.\neg \mathsf{Male}$
(4)	из (3)	(x, y): hasChild и y: $\neg$Male, для какого-то y
(5)	из (2) & (4)	y: Male
(6)	из (4) & (5)	**противоречие:** y: Male and y: $\neg$Male

A: концепт **не реализуем!**

Пример 2

Q: Реализуем ли $\boxed{(\forall \mathsf{hasChild.Male}) \sqcap (\exists \mathsf{hasChild.Male})}$?

Попробуем построить реализующую **интерпретацию**

(1)		x: $(\forall \mathsf{hasChild.Male}) \sqcap (\exists \mathsf{hasChild.Male})$
(2)	из (1)	x: $\forall \mathsf{hasChild.Male}$
(3)	из (1)	x: $\exists \mathsf{hasChild.Male}$
(4)	из (3)	(x, y): hasChild и y: Male, для какого-то y

A: концепт **реализуем** в интерпретации $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$

$$\Delta^{\mathcal{I}} = \{x, y\}, \qquad \mathsf{Male}^{\mathcal{I}} = \{y\}, \qquad \mathsf{hasChild}^{\mathcal{I}} = \{(x, y)\}$$

$$x \in ((\forall \mathsf{hasChild.Male}) \sqcap (\exists \mathsf{hasChild.Male}))^{\mathcal{I}}$$

Пример 3

Q: Реализуем ли $\boxed{\forall R.(\neg C \sqcup D) \sqcap \exists R.(C \sqcap D)}$?

(1)		$x : \forall R.(\neg C \sqcup D) \sqcap \exists R.(C \sqcap D)$
(2)	из (1)	$x : \forall R.(\neg C \sqcup D)$
(3)	из (1)	$x : \exists R.(C \sqcap D)$
(4)	из (3)	$(x, y) : R$ и $y : C \sqcap D$, для какого-то y
(5)	из (4)	$y : C$
(6)	из (4)	$y : D$
(7)	из (2)	$y : \neg C \sqcup D$

Недетерминированный выбор:

(8.1)	из (7)	$y : \neg C$
(8.2)	из (7)	$y : D$

A: (8.1) ведет к **противоречию**, тогда как (8.2) дает **реализующую интерпретацию**

Табличный метод

Как доказать реализуемость концепта?

Применим **табличный метод**

(множество **правил вывода**)

Процедура:

- преобразовать данный концепт в **приведенную нормальную форму** (Negation Normal Form)

  (отрицание только перед именами концептов)

- применять **правила вывода** в произвольном порядке, пока это возможно

  Применение правил

  - остановка, если получено **противоречие**
  - остановка, если никакое правило нельзя применить

- концепт **реализуем** т. и т.т., когда

  законченная таблица без противоречий может быть построена

Приведенная нормальная форма

Концепт находится в **приведенной нормальной форме, ПНФ** (Negation Normal Form, NNF)

если отрицание входит только перед <u>*именами концептов*</u>

Каждый $\mathcal{ALC}$-концепт может быть трансформирован в эквивалентный концепт в

при помощи следующих правил:

$$
\begin{array}{lcll}
\neg\top & \equiv & \bot & \\
\neg\bot & \equiv & \top & \\
\neg\neg C & \equiv & C & \\
\neg(C \sqcap D) & \equiv & \neg C \sqcup \neg D & \text{(закон де Моргана)} \\
\neg(C \sqcup D) & \equiv & \neg C \sqcap \neg D & \text{(закон де Моргана)} \\
\neg\forall R.C & \equiv & \exists R.\neg C & \\
\neg\exists R.C & \equiv & \forall R.\neg C &
\end{array}
$$

Пример

Преобразуем концепт

$$\neg\exists R.(A \sqcap \neg B) \ \sqcup \ \neg\forall R.(\neg A \sqcup \neg B)$$

в ПНФ

$\neg\exists R.(A \sqcap \neg B) \ \sqcup \ \neg\forall R.(\neg A \sqcup \neg B) \ \equiv$ (используя $\neg\exists R.D \ \equiv \ \forall R.\neg D$)

$\forall R.\neg(A \sqcap \neg B) \ \sqcup \ \neg\forall R.(\neg A \sqcup \neg B) \ \equiv$ (используя $\neg(A \sqcap D) \ \equiv \ \neg A \sqcup \neg D$)

$\forall R.(\neg A \sqcup \neg\neg B) \ \sqcup \ \neg\forall R.(\neg A \sqcup \neg B) \ \equiv$ (используя $\neg\neg B \ \equiv \ B$)

$\forall R.(\neg A \sqcup B) \ \sqcup \ \neg\forall R.(\neg A \sqcup \neg B) \ \equiv$ (используя $\neg\forall R.D \ \equiv \ \exists R.\neg D$)

$\forall R.(\neg A \sqcup B) \ \sqcup \ \exists R.\neg(\neg A \sqcup \neg B) \ \equiv$ (используя $\neg(C \sqcup D) \ \equiv \ \neg C \sqcap \neg D$)

$\forall R.(\neg A \sqcup B) \ \sqcup \ \exists R.(\neg\neg A \sqcap \neg\neg B) \ \equiv$ (используя $\neg\neg C \ \equiv \ C$)

$\forall R.(\neg A \sqcup B) \ \sqcup \ \exists R.(A \sqcap B)$

Табличное исчисление для проверки реализуемости $\mathcal{ALC}$-концептов

Узел: выражение вида $x : C$ или $(x, y) : R$,
где C — концепт в ПНФ а R — имя роли

Таблица: конечное непустое множество узлов S

Правила вывода: $S \longrightarrow S'$, где S' таблица, содержащая S

Полная таблица: S полна если никакое правило не может быть применено к S

Clash: S содержит **противоречие** если

$$\{\, x : A, \quad x : \neg A \,\} \subseteq S,$$ для какого-то x и имени концепта A

Цель: Начиная с $S_0 = \{x : C\}$ и
применяя правила вывода построить **полную** и **непротиворечивую** таблицу S_n

- Если это возможно, возможно извлечь **интерпретацию, реализующую** C
- Иначе C **не реализуем**

Правила вывода для проверки реализуемости $\mathcal{ALC}$-концептов (1)

$$S \;\rightarrow_{\sqcap}\; S \cup \{\, x\colon C,\; x\colon D \,\}$$

если (a) $x\colon C \sqcap D \in S$

(b) хотя бы один $x\colon C$ и $x\colon D$ не входит в S

$$S \;\rightarrow_{\sqcup}\; S \cup \{\, x\colon E \,\}$$

если (a) $x\colon C \sqcup D \in S$

(b) ни $x\colon C$ ни $x\colon D$ не входят в S

(c) $E = C$ или $E = D$ **(ветвление!)**

NB: Недетерминированно выбираем один из членов и добавляем к таблице.

NB: Если обнаружится противоречие, пробуем другую ветвь

Правила вывода для проверки реализуемости $\mathcal{ALC}$-концептов (2)

$$\boldsymbol{S} \;\longrightarrow_{\forall}\; \boldsymbol{S} \cup \{\, \boldsymbol{y}\colon \boldsymbol{C} \,\}$$

если (a) $\boldsymbol{x}\colon \forall \boldsymbol{R}.\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{S}$

(b) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\colon \boldsymbol{R} \in \boldsymbol{S}$

(c) $\boldsymbol{y}\colon \boldsymbol{C} \notin \boldsymbol{S}$

NB: Применяется только если $\boldsymbol{y}$ такой что $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\colon \boldsymbol{R} \in \boldsymbol{S}$ может быть найден

$$\boldsymbol{S} \;\longrightarrow_{\exists}\; \boldsymbol{S} \cup \{\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\colon \boldsymbol{R},\; \boldsymbol{y}\colon \boldsymbol{C} \,\}$$

если (a) $\boldsymbol{x}\colon \exists \boldsymbol{R}.\boldsymbol{C} \in \boldsymbol{S}$

(b) $\boldsymbol{y}$ новый элемент

(c) нет $\boldsymbol{z}$ т.ч.

и $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})\colon \boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{z}\colon \boldsymbol{C}$ входят в $\boldsymbol{S}$

NB: Единственное правило, вводящее новые элементы.

Пример

Пусть $\boxed{\mathrm{Woman} \equiv \mathrm{Person} \sqcap \mathrm{Female}}$, $\boxed{\mathrm{Mother} \equiv \mathrm{Parent} \sqcap \mathrm{Female}}$,

и $\boxed{\mathrm{Parent} \equiv \mathrm{Person} \sqcap \exists \mathrm{hasChild}.\mathrm{Person}}$

Поглощает ли концепт $\boxed{\mathrm{Woman}}$ концепт $\boxed{\mathrm{Mother}}$?

Пример

Пусть $\boxed{\mathsf{Woman} \equiv \mathsf{Person} \sqcap \mathsf{Female}}$, $\boxed{\mathsf{Mother} \equiv \mathsf{Parent} \sqcap \mathsf{Female}}$,

и $\boxed{\mathsf{Parent} \equiv \mathsf{Person} \sqcap \exists \mathsf{hasChild}.\mathsf{Person}}$

Поглощает ли концепт $\boxed{\mathsf{Woman}}$ концепт $\boxed{\mathsf{Mother}}$?

Является ли концепт $\boxed{\neg\mathsf{Woman} \sqcap \mathsf{Mother}}$ реализуемым? (подставим определения)

Пример

Пусть $\boxed{\text{Woman} \equiv \text{Person} \sqcap \text{Female}}$, $\boxed{\text{Mother} \equiv \text{Parent} \sqcap \text{Female}}$,

и $\boxed{\text{Parent} \equiv \text{Person} \sqcap \exists \text{hasChild.Person}}$

Поглощает ли концепт $\boxed{\text{Woman}}$ концепт $\boxed{\text{Mother}}$?

Является ли концепт $\boxed{\neg\text{Woman} \sqcap \text{Mother}}$ реализуемым? (подставим определения)

$$S_0 = \{\, x\colon (\neg\text{Person} \sqcup \neg\text{Female}) \sqcap ((\text{Person} \sqcap \exists\text{hasChild.Person}) \sqcap \text{Female}) \,\}$$

Пример

Пусть $\boxed{\text{Woman} \equiv \text{Person} \sqcap \text{Female}}$, $\boxed{\text{Mother} \equiv \text{Parent} \sqcap \text{Female}}$,

и $\boxed{\text{Parent} \equiv \text{Person} \sqcap \exists\text{hasChild.Person}}$

Поглощает ли концепт $\boxed{\text{Woman}}$ концепт $\boxed{\text{Mother}}$?

Является ли концепт $\boxed{\neg\text{Woman} \sqcap \text{Mother}}$ реализуемым? (подставим определения)

$$\boxed{S_0 = \{\, x\colon (\neg\text{Person} \sqcup \neg\text{Female}) \sqcap ((\text{Person} \sqcap \exists\text{hasChild.Person}) \sqcap \text{Female}) \,\}}$$

Применим правила

$$x : C \sqcap D \rightarrow_{\sqcap} \; x\colon C,\; x\colon D$$

$$x : C \sqcup D \rightarrow_{\sqcup} \; x\colon E$$

$$x : \forall R.C \rightarrow_{\forall} \; y\colon C$$

$$x : \exists R.C \rightarrow_{\exists} \; (x, y)\colon R,\; y\colon C$$

Пример (окончание)

Пусть $\boxed{\text{Woman} \equiv \text{Person} \sqcap \text{Female}}$, $\boxed{\text{Mother} \equiv \text{Parent} \sqcap \text{Female}}$,

и $\boxed{\text{Parent} \equiv \text{Person} \sqcap \exists\text{hasChild.Person}}$

Поглощает ли концепт $\boxed{\text{Woman}}$ концепт $\boxed{\text{Mother}}$?

Является ли концепт $\boxed{\neg\text{Woman} \sqcap \text{Mother}}$ реализуемым? (подставим определения)

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \{\, x\colon (\neg\text{Person} \sqcup \neg\text{Female}) \sqcap ((\text{Person} \sqcap \exists\text{hasChild.Person}) \sqcap \text{Female}) \,\} \\
S_0 \to_{\sqcap} S_1 &= S_0 \cup \{\, x\colon \neg\text{Person} \sqcup \neg\text{Female},\ x\colon \text{Person} \sqcap \exists\text{hasChild.Person},\ x\colon \text{Female} \,\} \\
S_1 \to_{\sqcap} S_2 &= S_1 \cup \{\, x\colon \text{Person},\ x\colon \exists\text{hasChild.Person} \,\} \\
S_2 \to_{\sqcup} S_{3.1} &= S_2 \cup \{\, x\colon \neg\text{Person} \,\} \quad \textbf{противоречие} \\
S_2 \to_{\sqcup} S_{3.2} &= S_2 \cup \{\, x\colon \neg\text{Female} \,\} \quad \textbf{противоречие}
\end{aligned}
$$

Т.о. концепт $\boxed{\neg\text{Woman} \sqcap \text{Mother}}$ не реализуем и $\boxed{\text{Woman}}$ поглощает $\boxed{\text{Mother}}$