Системы типизации лямбда-исчисления

Лекция 3. Редукция

Денис Москвин

06.03.2011

CS Club при ПОМИ РАН

Асимметрия β-конверсии

Мы строили λ-исчисление как теорию о равенстве термов.

Рассмотрим, однако, примеры:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\;\mathbf{I} &\equiv (\lambda x y.\, x)\,(\lambda z.\, z) = \lambda y z.\, z \\ \mathbf{I}\;\mathbf{I}\;\mathbf{K}_* &\equiv (\lambda x.\, x)\;\mathbf{I}\;\mathbf{K}_* = \mathbf{I}\;\mathbf{K}_* \equiv (\lambda x.\, x)\,(\lambda y z.\, z) = \lambda y z.\, z \end{aligned}$$

Видно, что процесс носит односторонний характер: термы при конверсиях «упрощаются». Для исследования подобного вычислительного аспекта вводят понятие ***редукции***:

- $\mathbf{K}\;\mathbf{I} \to_\beta \mathbf{K}_*$ — редуцируется за один шаг;
- $\mathbf{I}\;\mathbf{I}\;\mathbf{K}_* \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{K}_*$ — редуцируется;
- $\mathbf{K}\;\mathbf{I} =_\beta \mathbf{I}\;\mathbf{I}\;\mathbf{K}_*$ — конвертируемо (равно).

Редексы

Терм вида $(\lambda x.\, M)\, N$ называется β-***редексом***.

Терм $M[x := N]$ называется его ***сокращением***.

Например, терм $\mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{I})$ содержит два редекса

$$(\lambda x.\, x)\, ((\lambda\, y\, z.\, y)\, (\lambda\, p.\, p))$$
$$(\lambda x.\, x)\, ((\lambda y\, z.\, y)\, (\lambda\, p.\, p))$$

Может ли сокращение увеличить число редексов?

Понятие редукции

1. Бинарное отношение $\mathcal{R}$ над Λ называют ***совместимым*** (с операциями λ-исчисления), если

$$
\begin{aligned}
M \,\mathcal{R}\, N \;\Rightarrow\; & (Z\,M) \,\mathcal{R}\, (Z\,N), \\
& (M\,Z) \,\mathcal{R}\, (N\,Z), \\
& (\lambda x\,.\,M) \,\mathcal{R}\, (\lambda x\,.\,N).
\end{aligned}
$$

   для любых $M, N, Z \in \Lambda$.

2. Совместимое отношение эквивалентности называют отношением ***конгруэнтности*** над Λ.

3. Совместимое, рефлексивное и транзитивное отношение называют отношением ***редукции*** над Λ.

Редукция за один шаг $\to_\beta$

Бинарное отношение β-***редукции за один шаг*** $\to_\beta$ над Λ:

$$\begin{array}{rcl}
(\lambda x.\, M)\, N & \to_\beta & M[x := N] \\
M \to_\beta N & \Rightarrow & Z\, M \to_\beta Z\, N \\
M \to_\beta N & \Rightarrow & M\, Z \to_\beta N\, Z \\
M \to_\beta N & \Rightarrow & \lambda x.\, M \to_\beta \lambda x.\, N
\end{array}$$

Примеры:

$$(\lambda x.\, x)\, ((\lambda\, y\, z.\, y)\, (\lambda\, p.\, p)) \;\to_\beta\; (\lambda\, y\, z.\, y)\, (\lambda\, p.\, p) \;\to_\beta\; \lambda\, z\, p.\, p$$

$$(\lambda x.\, x)\, ((\lambda\, y\, z.\, y)\, (\lambda\, p.\, p)) \;\to_\beta\; (\lambda x.\, x)\, (\lambda\, z\, p.\, p) \;\to_\beta\; \lambda\, z\, p.\, p$$

По определению $\to_\beta$ является совместимым (с операциями λ-исчисления).

Многошаговая редукция $\twoheadrightarrow_\beta$

Бинарное отношение β-***редукции*** $\twoheadrightarrow_\beta$ над Λ определяется индуктивно:

$$
\begin{array}{rl}
(a) & M \twoheadrightarrow_\beta M \\
(b) & M \to_\beta N \;\Rightarrow\; M \twoheadrightarrow_\beta N \\
(c) & M \twoheadrightarrow_\beta N, N \twoheadrightarrow_\beta L \;\Rightarrow\; M \twoheadrightarrow_\beta L
\end{array}
$$

Примеры:

$$
\begin{array}{lcl}
(\lambda x.\,x)\,((\lambda y\,z.\,y)\,(\lambda p.\,p)) & \twoheadrightarrow_\beta & (\lambda x.\,x)\,((\lambda y\,z.\,y)\,(\lambda p.\,p)) \\
(\lambda x.\,x)\,((\lambda y\,z.\,y)\,(\lambda p.\,p)) & \twoheadrightarrow_\beta & (\lambda y\,z.\,y)\,(\lambda p.\,p) \\
(\lambda x.\,x)\,((\lambda y\,z.\,y)\,(\lambda p.\,p)) & \twoheadrightarrow_\beta & \lambda z\,p.\,p
\end{array}
$$

Отношение $\twoheadrightarrow_\beta$ является транзитивным рефлексивным замыканием $\to_\beta$ и, следовательно, отношением редукции.

Отношение конвертируемости $=_\beta$ (1)

Бинарное отношение $=_\beta$ над Λ определяются индуктивно:

$$\begin{array}{ll} (a) & M \twoheadrightarrow_\beta N \;\Rightarrow\; M =_\beta N \\ (b) & M =_\beta N \;\Rightarrow\; N =_\beta M \\ (c) & M =_\beta N, N =_\beta L \;\Rightarrow\; M =_\beta L \end{array}$$

Отношение $=_\beta$ является отношением конгруэнтности.

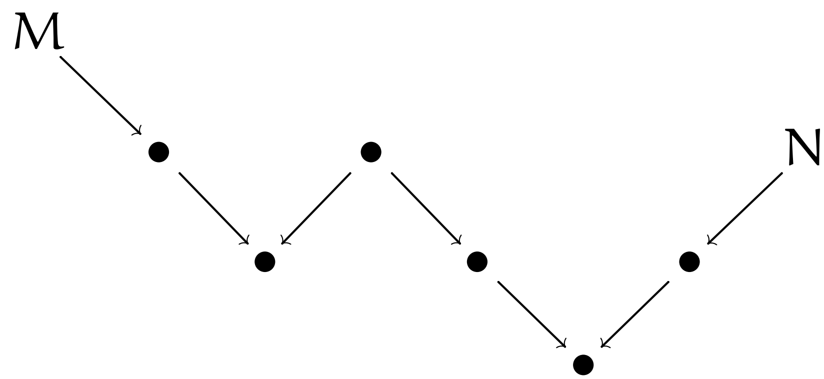
Утверждение. $M =_\beta N \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \vdash M = N$.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Индукция по генерации $\vdash$. ($\Rightarrow$) По индукции показывается

$$\begin{array}{rcl} M \to_\beta N & \Rightarrow & \lambda \vdash M = N; \\ M \twoheadrightarrow_\beta N & \Rightarrow & \lambda \vdash M = N; \\ M =_\beta N & \Rightarrow & \lambda \vdash M = N. \end{array}$$

Отношение конвертируемости $=_\beta$ (2)

Интуитивно: два терма M N связаны отношением $=_\beta$, если есть связывающая их цепочка $\to_\beta$-стрелок:



Пример. $\mathbf{K}\ \mathbf{I}\ =_\beta\ \mathbf{I}\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}_*$:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbf{I}\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}_* \arrow[dl] \\
\mathbf{K}\ \mathbf{I} \arrow[dr] & & \mathbf{I}\ \mathbf{K}_* \arrow[dl] & \\
 & \mathbf{K}_* & &
\end{tikzcd}$$

Нормальная форма (1)

- λ-терм M находится в β-***нормальной форме*** (β-nf), если в нем нет подвыражений, являющихся β-редексами.

- λ-терм M имеет β-нормальную форму, если для некоторого N выполняется $M =_\beta N$ и N находится в β-nf.

Терм $\lambda x\, y.\, y\,(\lambda z.\, x)$ находится в β-нормальной форме.

Терм $(\lambda x.\, x\, x)\, y$ не находится в β-нормальной форме, но имеет в качестве β-nf терм $y\, y$.

Нормальная форма (2)

Лемма о редукции NF. Пусть M находится в β-нормальной форме. Тогда

$$M \twoheadrightarrow_\beta N \quad \Rightarrow \quad N \equiv M.$$

Док-во. Если терм M находится в β-нормальной форме, то он не содержит редексов. Поэтому невозможно $M \rightarrow_\beta N$. Поэтому, поскольку $M \twoheadrightarrow_\beta N$, это должно иметь место из-за рефлексивности. ■

Нормальная форма (3)

Не все термы имеют β-нормальную форму:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Omega} &\equiv \omega\,\omega \\
&\equiv (\lambda x.\, x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x) \\
&\to_\beta (\lambda x.\, x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x) \\
&\to_\beta \ldots
\end{aligned}
$$

Это пока не доказательство! Может быть существует терм N в β-nf, такой что $\mathbf{\Omega} =_\beta \mathrm{N}$, например, так

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{M} \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
\mathbf{\Omega} & & \mathrm{N}
\end{tikzcd}
$$

Нормальная форма (4)

Бывают термы, «удлинняющиеся» при редукции:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Omega_3} &\equiv \omega_3\,\omega_3 \\
&\equiv (\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x) \\
&\to_\beta (\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x) \\
&\to_\beta (\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x) \\
&\to_\beta \ldots
\end{aligned}
$$

С какой скоростью будет расти $\mathbf{\Omega_4} \equiv \omega_4\,\omega_4$?

Нормальная форма (5)

Не все последовательности редукций приводят β-нормальной форме:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} & \equiv & \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x)) \\
& \to_\beta & \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x)) \\
& \to_\beta & \ldots \\
\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} & \equiv & (\lambda x\,y.\,x)\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} \\
& \to_\beta & (\lambda y.\,\mathbf{I})\,\mathbf{\Omega} \\
& \to_\beta & \mathbf{I}
\end{array}
$$

(синим отмечен сокращаемый редекс)

Редукционные графы (1)

Редукционный граф терма $M \in \Lambda$, обозначаемый $G_\beta(M)$, — это ориентированный мультиграф с вершинами в $\{N \mid M \twoheadrightarrow_\beta N\}$ и дугами $\to_\beta$.

$$G_\beta\,(\mathbf{I}\,(\mathbf{I}\,x)) \;=\; \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \qquad G_\beta\,(\boldsymbol{\Omega}) \;=\; \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

$$G_\beta\,((\lambda x.\,\mathbf{I})\,\boldsymbol{\Omega}) \;=\; \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \qquad G_\beta\,(\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega}) \;=\; \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop above] \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

$$G_\beta\,(\boldsymbol{\Omega_3}) \;=\; ??? \qquad G_\beta\,((\lambda x.\,\mathbf{I})\,\boldsymbol{\Omega_3}) \;=\; ???$$

Редукционные графы (2)

$$G_\beta\left(\mathbf{\Omega_3}\right) \;=\; \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \ldots$$

Не все редукционные графы конечны.

$$\begin{tikzcd}
G_\beta\left(\left(\lambda x.\,\mathbf{I}\right)\mathbf{\Omega_3}\right) \;=\; & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[dl] & \bullet \arrow[r] \arrow[dll] & \bullet \arrow[r] \arrow[dlll] & \ldots \\
& \color{blue}\bullet & & & &
\end{tikzcd}$$

Не все бесконечные редукционные графы не имеют нормальной формы.

Теорема Чёрча-Россера

Теорема. [Чёрч-Россер] Если $M \twoheadrightarrow_\beta N$, $M \twoheadrightarrow_\beta K$, то существует L, такой что $N \twoheadrightarrow_\beta L$ и $K \twoheadrightarrow_\beta L$.

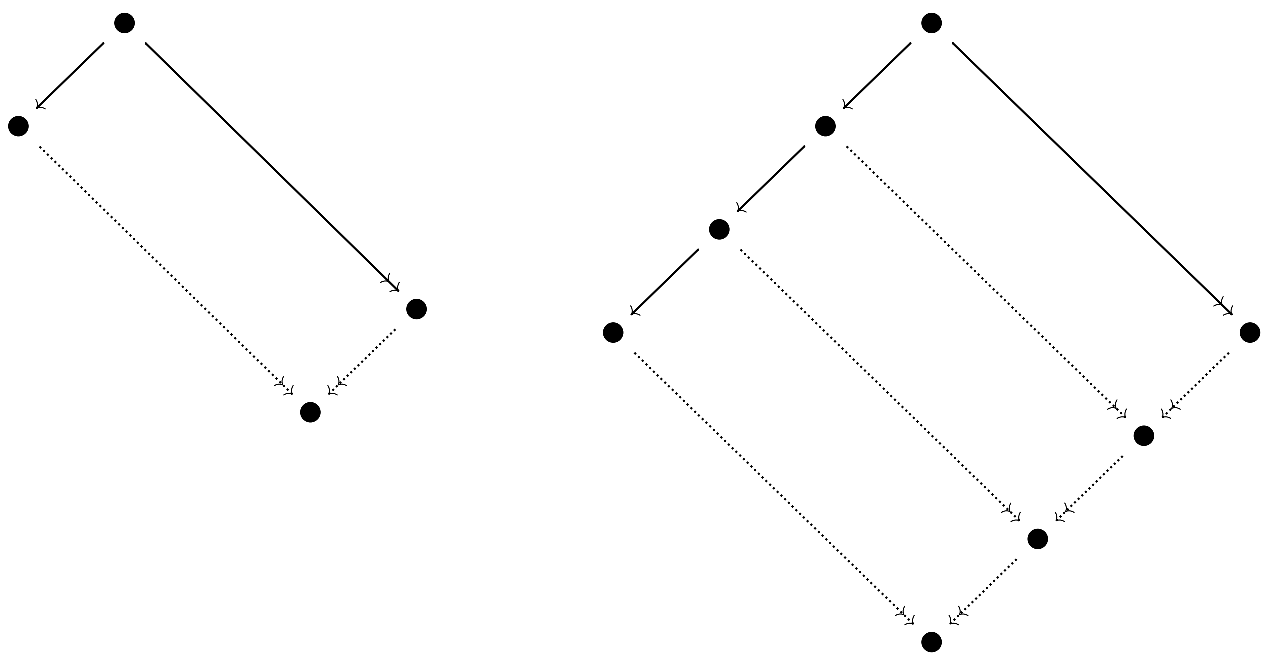
Иначе говоря, β-редукция обладает ***свойством ромба***:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
N \arrow[dr, dotted, two heads] & & K \arrow[dl, dotted, two heads] \\
 & L &
\end{tikzcd}$$

Иногда используют термин ***сходимость***.

Теорема Чёрча-Россера (доказательство)

Лемма полоски (Strip lemma)



А затем из полосок составляем «ромб». [см. LCWT, 2.3]

Лемма полоски (доказательство) (1)

Лемма полоски доказывается через расширенное λ-исчисление ($\underline{\Lambda}$) с дополнительным правилом:

$$M, N \in \underline{\Lambda} \;\Rightarrow\; (\underline{\lambda} x.\, M)\, N \in \underline{\Lambda}$$

При этом на процесс одношаговой редукции подчёркивание не влияет:

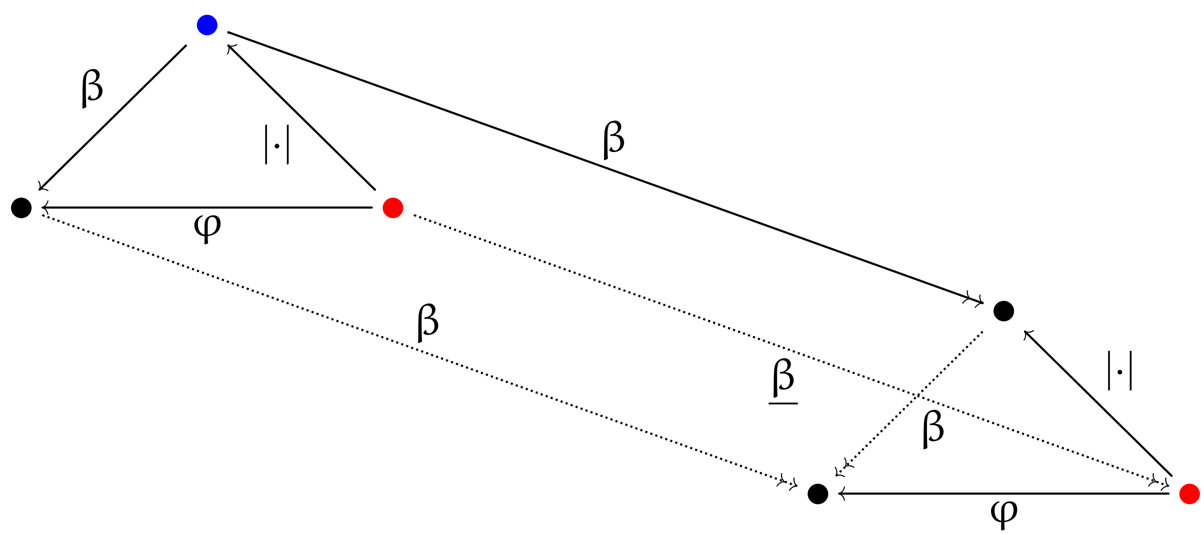
$$\begin{aligned} (\underline{\lambda} x.\, M)\, N &\to_{\underline{\beta}} M[x := N] \\ (\lambda x.\, M)\, N &\to_{\underline{\beta}} M[x := N] \end{aligned}$$

Задаются два отображения:

- $|\cdot| : \underline{\Lambda} \to \Lambda$ — стирающее подчёркивание;
- $\varphi : \underline{\Lambda} \to \Lambda$ — редуцирующее подчёркнутые редексы.

Лемма полоски (доказательство) (2)

Три леммы: задний и нижний прямоугольники и передний треугольник.



Лемма полоски — передний прямоугольник.

Следствия теоремы Чёрча-Россера (1)

Существование общего редукта. Если $M =_\beta N$, то существует L, такой что, $M \twoheadrightarrow_\beta L$ и $N \twoheadrightarrow_\beta L$.

Доказательство. Индукция по генерации $=_\beta$.
Случай 1. $M =_\beta N$, поскольку $M \twoheadrightarrow_\beta N$. Возьмем $L \equiv N$.
Случай 2. $M =_\beta N$, поскольку $N =_\beta M$. По гипотезе индукции имеется общий β-редукт L_1 для N, M. Возьмем $L \equiv L_1$.
Случай 3. $M =_\beta N$, поскольку $M =_\beta N'$, $N' =_\beta N$. Тогда

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, two heads] & (IH) & N' \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & (IH) & N \arrow[dl, two heads] \\
& L_1 \arrow[dr, dotted, two heads] & CR & L_2 \arrow[dl, dotted, two heads] & \\
& & L & &
\end{tikzcd}$$

Следствия теоремы Чёрча-Россера (2)

Редуцируемость к NF. Если M имеет N в качестве β-nf, то $M \twoheadrightarrow_\beta N$.

Док-во. Пусть $M =_\beta N$, причем N находится в β-nf. По Следствию о существовании общего редукта имеем $M \twoheadrightarrow_\beta L$ и $N \twoheadrightarrow_\beta L$ для некоторого L. Но тогда $N \equiv L$ по Лемме о редукции NF, поэтому $M \twoheadrightarrow_\beta N$. ■

Теперь мы можем доказать отсутствие NF у $\mathbf{\Omega}$. Иначе выполнялось бы

$$\mathbf{\Omega} \twoheadrightarrow_\beta N, \qquad N \text{ является } \beta\text{-nf.}$$

Но $\mathbf{\Omega}$ редуцируется лишь к себе и не является β-nf.

Следствия теоремы Чёрча-Россера (3)

Единственность NF. λ-терм имеет не более одной β-nf.

Док-во. Предположим M имеет два β-nf N_1 и N_2. Тогда $N_1 =_\beta N_2 (=_\beta M)$. По Следствию о существовании общего редукта $N_1 \twoheadrightarrow_\beta L$ и $N_2 \twoheadrightarrow_\beta L$ для некоторого L. Но тогда $N_1 \equiv L \equiv N_2$ по Лемме о редукции NF. ■

Теперь мы можем доказывать «неравенства», например
$\lambda \nvdash \mathtt{TRU} = \mathtt{FLS}$.
Иначе было бы $\mathtt{TRU} =_\beta \mathtt{FLS}$, но это две разные NF, что противоречит единственности.

Стратегии редукции (1)

Как мы можем редуцировать терм?

- Переменная: v — редукция завершена.
- Абстракция: $\lambda x.\, M$ — редуцируем M.
- Аппликация: $M\, N$. Все варианты отсюда.

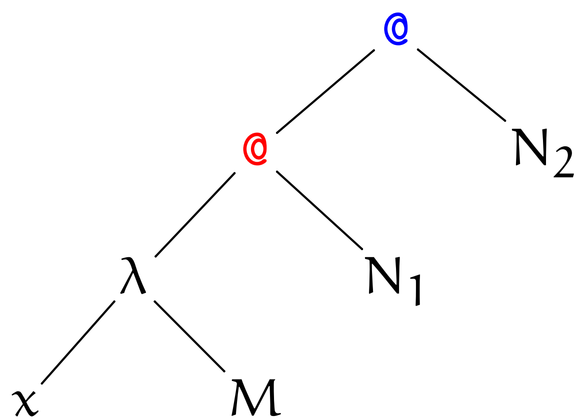
Разбираем аппликацию до не-аппликации (обычно влево):

- $(\ldots((v\, N_1)\, N_2)\ \ldots\ N_k)$ — редуцируем отдельно все N_i (обычно слева направо).
- $(\ldots(((\lambda x.\, M)\, N_1)\, N_2)\ \ldots\ N_k)$. Все варианты отсюда.

Нормальная стратегия: сокращаем редекс $(\lambda x.\, M)\, N_1$.
Аппликативная стратегия: редуцируем отдельно все N_i (обычно слева направо) до нормальной формы N_i', затем сокращаем редекс $(\lambda x.\, M)\, N_1'$.

Стратегии редукции (2)

Удобно изображать терм в виде дерева.
Например, для $((\lambda x.\, M)\, N_1)\, N_2$ дерево имеет вид:



Вершины @ задают аппликацию, вершины λ — абстракцию.

Вершины @ могут задавать редекс (@) или нет (@).
В первом случае при поиске редекса – кандидата на сокращение есть три варианта (нашли, влево, вправо), во втором — два (влево, вправо).

Аппликативная структура терма

Лямбда-терм может иметь одну из двух форм:

$$\begin{aligned} \lambda \overrightarrow{x}.\, y\, \overrightarrow{N} &\equiv \lambda x_1 \ldots x_n.\, y\, N_1 \ldots N_k, \quad n \geqslant 0, k \geqslant 0 \\ \lambda \overrightarrow{x}.\, (\lambda z.\, M)\, \overrightarrow{N} &\equiv \lambda x_1 \ldots x_n.\, (\lambda y.\, M)\, N_1 \ldots N_k, \quad n \geqslant 0, k > 0 \end{aligned}$$

Первая форма называется ***головной нормальной формой***.

Переменная y называется головной переменной, а редекс $(\lambda z.\, M)\, N_1$ — головным редексом.

Операционная семантика нормальной стратегии

Синтаксические категории:

- Нормальные формы: $\mathtt{NF} \ ::= \ \lambda x.\, \mathtt{NF} \mid \mathtt{NANF}$.
- Нормальные формы – не абстракции: $\mathtt{NANF} \ ::= \ v \mid \mathtt{NANF}\ \mathtt{NF}$.
- Не абстракции: $\mathtt{NA} \ = \ v \mid M\,N$.

Операционная семантика нормальной стратегии:

$$\frac{\mathtt{NA} \ \to \ \mathtt{NA}'}{\mathtt{NA}\ N \ \to \ \mathtt{NA}'\ N}\ \text{(Аппл1)} \qquad \frac{N \ \to \ N'}{\mathtt{NANF}\ N \ \to \ \mathtt{NANF}\ N'}\ \text{(Аппл2)}$$

$$\frac{M \ \to \ M'}{\lambda x.\, M \ \to \ \lambda x.\, M}\ \text{(Абстр)} \qquad (\lambda x.\, M)\, N \ \to \ M[x := N]\ \ \text{(Редук)}$$

Нормальная стратегия всегда сокращает самый левый внешний редекс (leftmost outermost)

Операционная семантика аппликативной стратегии

Синтаксические категории:

- Нормальные формы: $\mathtt{NF} ::= \lambda x.\,\mathtt{NF} \mid \mathtt{NANF}$.
- Нормальные формы – не абстракции: $\mathtt{NANF} ::= v \mid \mathtt{NANF}\ \mathtt{NF}$.
- Не абстракции: $\mathtt{NA} = v \mid M\,N$.

Операционная семантика аппликативной стратегии:

$$\frac{\mathtt{NA} \rightarrow \mathtt{NA}'}{\mathtt{NA}\ N \rightarrow \mathtt{NA}'\ N}\ (\text{Аппл1}) \qquad \frac{N \rightarrow N'}{\mathtt{NANF}\ N \rightarrow \mathtt{NANF}\ N'}\ (\text{Аппл2})$$

$$\frac{N \rightarrow N'}{(\lambda x.\,M)\ N \rightarrow (\lambda x.\,M)\ N'}\ (\text{Аппл3})$$

$$\frac{M \rightarrow M'}{\lambda x.\,M \rightarrow \lambda x.\,M'}\ (\text{Абстр}) \qquad (\lambda x.\,M)\,\mathtt{NF} \rightarrow M[x := \mathtt{NF}]\ (\text{Редук})$$

Теорема о нормализации

Теорема о нормализации. [Карри] Если терм M имеет нормальную форму, то последовательное сокращение самого левого внешнего редекса (leftmost outermost redex) приводит к этой нормальной форме.

То есть нормальная стратегия нормализует нормализуемое.

Можем доказывать отсутствие NF. Например, $\mathbf{K}\ \mathbf{\Omega}\ \mathbf{I}$.

Свойства стратегий

Недостаток нормальной стратегии — возможная неэффективность. Пусть N — «большой» терм

$$(\lambda x.\, F\,x\,(G\,x)\,x)\,N \to_{\beta} F\,N\,(G\,N)\,N$$

В процессе дальнейших редукций редексы в N придётся сокращать три раза. Зато в

$$(\lambda x\,y.\, y)\,N \to_{\beta} \lambda y.\, y$$

нормальная стратегия не вычисляет N ни разу.

Аппликативная стратегия в обоих примерах вычислит N один раз.

Стратегии редукции и ЯП

Аппликативная стратегия похожа на стратегию вычислений большинства языков программирования. Сначала вычисляются аргументы, затем происходит применение функции (вызов по значению).

Нормальная стратегия похожа на способ вычисления в «ленивых» языках (Haskell, Clean). Для решения указанных проблем с эффективностью используют механизм «вызова по необходимости».

$\mathbf{Y}$- и $\boldsymbol{\Theta}$-комбинаторы

Хотя $\mathbf{Y}\,F =_\beta F\,(\mathbf{Y}\,F)$, но неверно ни $\mathbf{Y}\,F \twoheadrightarrow_\beta F\,(\mathbf{Y}\,F)$, ни $F\,(\mathbf{Y}\,F) \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{Y}\,F$:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{Y}\,F & \equiv & (\lambda f.\,(\lambda x.\,f\,(x\,x))(\lambda x.\,f\,(x\,x)))\,F \\
& \to_\beta & (\lambda x.\,F\,(x\,x))(\lambda x.\,F\,(x\,x)) \\
& \to_\beta & F((\lambda x.\,F\,(x\,x))(\lambda x.\,F\,(x\,x))) \;\to_\beta\; \ldots
\end{array}
$$

Нужным свойством обладает комбинатор неподвижной точки Тьюринга $\boldsymbol{\Theta}$: $A = \lambda x\,y.\,y\,(x\,x\,y)$, $\boldsymbol{\Theta} = A\,A$. Действительно

$$
\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{\Theta}\,F & \equiv & A\,A\,F \\
& \to_\beta & (\lambda y.\,y\,(A\,A\,y))\,F \\
& \to_\beta & F(A\,A\,F) \\
& \equiv & F(\boldsymbol{\Theta}\,F)
\end{array}
$$

Применение $\mathbf{\Theta}$-комбинатора

$\mathbf{\Theta}$-комбинатор позволяет решать рекурсивные редукционные уравнения.

Найти G, такой что $\forall X\ \ G\,X \twoheadrightarrow X\,(X\,G)$.

$$\begin{aligned}
\forall X\ \ G\,X \twoheadrightarrow X\,(X\,G) \quad &\Leftarrow \quad G \twoheadrightarrow \lambda x.\, x\,(x\,G) \\
&\Leftarrow \quad G \twoheadrightarrow (\lambda g\,x.\, x\,(x\,g))\;G \\
&\Leftarrow \quad G \equiv \mathbf{\Theta}\;(\lambda g\,x.\, x\,(x\,g))
\end{aligned}$$

Домашнее задание

Покажите что для любого терма M существует такой N, находящийся в нормальной форме, что $N\,\mathbf{I} \twoheadrightarrow_\beta M$.

Изобразите редукционные графы следующих термов:
$\mathbf{I}\,\mathbf{I}\,(\mathbf{I}\,\mathbf{I}\,\mathbf{I})$;
$W W W$, где $W \equiv \lambda x\, y.\, x\, y\, y$;
$(\lambda x.\, \mathbf{I}\, x\, x)(\lambda x.\, \mathbf{I}\, x\, x)$.

Литература (1)

TAPL гл. 5
Benjamin C. Pierce, Types and Programming Languages, MIT Press, 2002
http://www.cis.upenn.edu/ bcpierce/tapl

LCWT гл. 2.3
Henk Barendregt, Lambda calculi with types,
Handbook of logic in computer science (vol. 2), Oxford University Press, 1993

Литература (2)

ЛИСС гл. 3, 11–15

Х. Барендрегт, Ламбда-исчисление, его синтаксис и семантика, М:Мир, 1985

I2FP гл. 3

John Harrison, Introduction to Functional Programming
http://www.cl.cam.ac.uk/teaching/Lectures/funprog-jrh-1996/
русский перевод: http://code.google.com/p/funprog-ru/