Приложение 1

КАРКАСНАЯ СФЕРА

Определение. Тетраэдр называется *каркасным*, если существует сфера, касающаяся всех его ребер.

Теорема. Тетраэдр является каркасным тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) суммы длин пар противоположных рёбер равны;
б) окружности, вписанные в грани, попарно касаются;
в) перпендикуляры к плоскостям граней, восставленные из центров вписанных в грани окружностей, пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Докажем сначала, что у каркасного тетраэдра суммы длин пар противоположных рёбер равны. Для этого достаточно заметить, что отрезки касательных к сфере, проведенные из одной вершины равны.

Докажем теперь, что если суммы длин пар противоположных рёбер тетраэдра равны, то окружности, вписанные в грани, попарно касаются. Пусть окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются ребра AB в точках C_1 и D_1 соответственно. Тогда

$$BC_1 = \frac{AB+BC-AC}{2} \quad \text{и} \quad BD_1 = \frac{AB+BD-AD}{2}.$$

С другой стороны, из равенства $AD + BC = AC + BD$ следует, что $BC - AC = BD - AD$. Таким образом, $BC_1 = BD_1$ и, значит, точки C_1 и D_1 совпадают, т.е. обе окружности касаются ребра AB в одной и той же точке. Доказательство для остальных ребер аналогично.

Докажем затем, что если окружности, вписанные в грани, попарно касаются, то перпендикуляры к плоскостям граней, восставленные из центров вписанных в грани окружностей, пересекаются в одной точке. Пусть две окружности, вписанные в грани, касаются общего ребра этих граней в одной и той же точке P, и пусть O_1 и O_2 — центы этих окружностей. Перпендикуляры к плоскостям граней, восставленные из точек O_1 и O_2, лежат в плоскости PO_1O_2, причем они не параллельны, поэтому они пересекаются. Аналогично, все перпендикуляры к плоскостям граней, восставленные из центров вписанных в грани окружностей, попарно пересекаются. Прямые, содержащие все эти перпендикуляры, не лежат в одной плоскости, следовательно, они пересекаются в одной точке.[2)]

Наконец, докажем, что если перпендикуляры к плоскостям граней, восставленные из центров вписанных в грани окружностей, пересекаются в одной точке O, то тетраэдр является каркасным. Пусть O_1 и O_2 — центы двух окружностей, вписанных в грани, причем эти окружности касаются общего ребра этих граней в точках P_1 и P_2. Перпендикуляры к плоскостям граней, восставленные из точек O_1 и O_2, лежат в плоскостях, проходящих через точки P_1 и P_2 и перпендикулярных общему ребру. Из того, что перпендикуляры пересекаются в одной точке, следует, что точки P_1 и P_2 совпадают.

Таким образом, сфера с центром O и радиусом OP_1 содержит все вписанные в грани окружности и касается всех ребер тетраэдра, т.е., является каркасной.

[2)] Известно, что если заданы несколько попарно пересекающихся прямых, то либо все они лежат в одной плоскости, либо все они проходят через одну точку.