I. Вписанный тетраэдр

Задача 1. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a. Одна из боковых граней пирамиды — такой же треугольник и перпендикулярна плоскости основания. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды. (*Указание*: см. утверждение 7)

Задача 2. Основание пирамиды — равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен a. Одна из боковых граней пирамиды — такой же треугольник и перпендикулярна плоскости основания. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды. (*Указание*: см. утверждение 7)

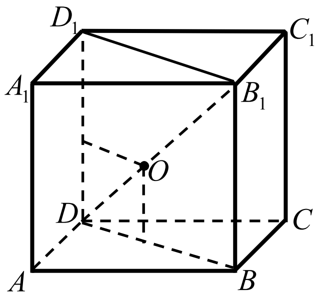
II. Описанный тетраэдр

Задача 3. Боковое ребро PA пирамиды $PABC$ равно 15 и перпендикулярно плоскости треугольника ABC, в котором $AB = AC = 10$; $BC = 12$. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы. (*Указание*: см. утверждение 10)

III. Каркасная сфера

Задача 4. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 12, высота пирамиды равна 4. Найдите радиус шара, вписанного в каркас пирамиды.

Задача 5. Шар касается ровно трех граней куба и ровно трех его ребер. Найдите радиус шара, если ребро куба равно a. (*Указание*: Центр шара – точка O – лежит на диагонали B_1D и расположена на одинаковом расстоянии как от плоскостей ABC, ABB_1 и B_1BC, так и от прямых DA, DC и DD_1).

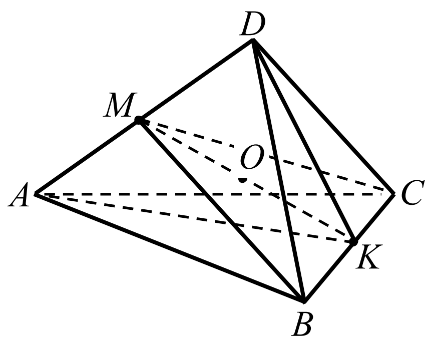


Задача 6. Сфера касается всех ребер тетраэдра, два противоположных ребра которого равны a и b, а все остальные ребра равны между собой. Найдите радиус этой сферы.

Ответ: $\frac{\sqrt{2ab}}{4}$.

Решение задачи 6. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, в котором $BC = a$, $AD = b$ и $AB = AC = BD = CD = x$.

Все ребра тетраэдра касаются сферы, следовательно, суммы противоположных ребер тетраэдра равны, откуда $x = \frac{a+b}{2}$. Обозначим через K и M середины ребер BC и AD соответственно. Плоскости ADK и BMC перпендикулярны ребрам BC и AD соответственно, следовательно, являются плоскостями симметрии тетраэдра, а, значит, центр сферы — точка O, равноудаленная от всех ребер тетраэдра, — есть середина общей высоты KM равнобедренных треугольников ADK и BMC.



Окончательно получаем:

$$R = MO = \frac{1}{2}\sqrt{MB^2 - BK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{BD^2 - DM^2 - BK^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4} - \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2ab}}{4}.$$

Задача 7. Сфера касается всех ребер тетраэдра, боковые ребра которого попарно перпендикулярны. Найдите радиус этой сферы, если радиус сферы, описанной вокруг данного тетраэдра, равен $3\sqrt{3}$.

Ответ: $6(\sqrt{2}-1)$

Решение задачи 7.

1) Пусть $PABC$ — тетраэдр, боковые ребра PC, PA, PB которого попарно перпендикулярны. Обозначим длины этих ребер через a, b и c соответственно (рис.1). Тетраэдр имеет сферу, касающуюся всех его ребер тогда и только тогда, когда суммы противоположных ребер тетраэдра попарно равны. В нашем случае имеем:

$$a+\sqrt{b^2+c^2}=b+\sqrt{a^2+c^2} \iff$$

$$\iff a-b=\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2} \iff$$

$$\iff (a-b)\left(\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}\right)=a^2-b^2 \iff$$

$$\iff (a-b)\left(\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}\right)=a^2-b^2 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} a=b, \\ \sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}=a+b \end{array}\right. \iff a=b.$$

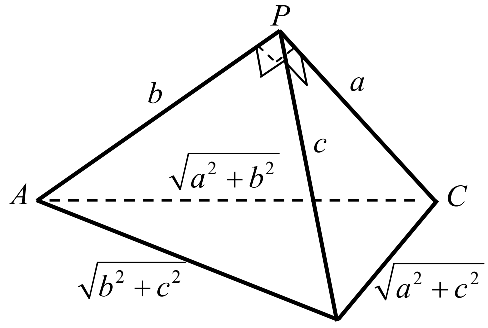


*Рис.*1

Аналогично, получаем $a=c$. Таким образом, тетраэдр $PABC$ — правильная пирамида, длина бокового ребра которой равна a.

2) Пусть PH — высота пирамиды $PABC$, а CK — высота ее основания ($H\in CK$). Центр сферы O, касающейся всех ребер тетраэдра, есть точка, равноудаленная от этих ребер. Следовательно, $O\in PH$ (рис.2). Так как отрезок KH — проекция отрезка OK на плоскость ABC, то согласно теореме о трех перпендикулярах $OK\perp AB$. Опустим также перпендикуляр OM на ребро AP. Тогда $OK=OM=r$, где r — радиус сферы, касающейся всех ребер тетраэдра и $AM=AK$, (отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки).

Далее находим:

а) ΔABP: $AB=BP\sqrt{2}=a\sqrt{2}$, $AK=\frac{1}{2}AB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

б) ΔABC: $AH=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

в) ΔAPH: $PH=\sqrt{AP^2-AH^2}=\frac{a}{\sqrt{3}}$;

г) $MP=AP-AM=a-\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$;

д) $\triangle OMP\sim\triangle AHP$: $\frac{OM}{AH}=\frac{PM}{PH}$, $OM=a(\sqrt{2}-1)$;

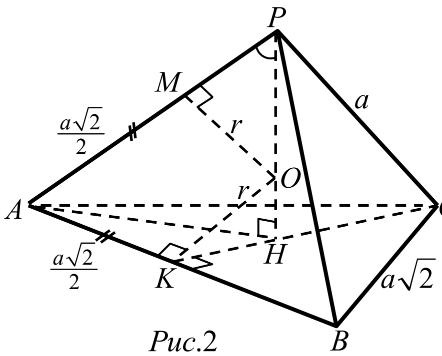


*Рис.*2

3) Радиус R сферы, описанной вокруг данного тетраэдра, является радиусом сферы, описанной вокруг куба, ребро которого равно боковому ребру a данного тетраэдра (рис.3). Следовательно, $a=\frac{2R}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=6$.

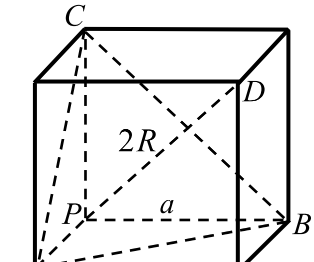


*Рис.*3

Окончательно получаем $r=6(\sqrt{2}-1)$.

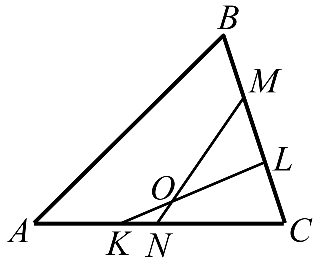
IV. Условия принадлежности трёх точек одной прямой и четырёх точек одной плоскости

Задача 8. Точки K, L, M и N на сторонах треугольника ABC таковы, что $\frac{AK}{KC}=\frac{CL}{LB}=\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$, N — середина AC. Найдите отношение, в котором точка пересечения отрезков KL и MN делит отрезок KL.

Ответ: 2:3.

Решение задачи 8.

Обозначим через O точку пересечения отрезков KL и MN, а через x — величину отношения $\frac{KO}{KL}$. Тогда $\overrightarrow{KO}=x\overrightarrow{KL}$.



Поскольку L — середина отрезка MC и $KN=\frac{1}{4}KC$, получаем

$\overrightarrow{KO}=x\overrightarrow{KL}=x\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KC}\right)=\frac{x}{2}\left(\overrightarrow{KM}+4\overrightarrow{KN}\right)=\frac{x}{2}\overrightarrow{KM}+2x\overrightarrow{KN}$.

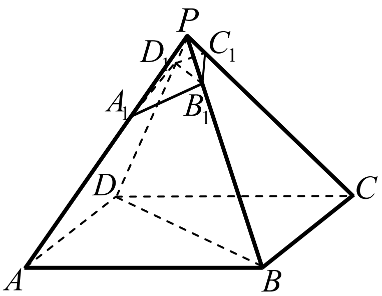
Так как точка O лежит на прямой MN, то $\frac{x}{2}+2x=1$, откуда находим $x=\frac{2}{5}$.

Таким образом, $\frac{KO}{KL}=\frac{2}{5}$, следовательно, $\frac{KO}{OL}=\frac{2}{3}$.

Задача 9. Основание четырехугольной пирамиды — параллелограмм $ABCD$. Точки A_1, B_1, C_1 на боковых ребрах PA, PB и PC пирамиды таковы, что $\frac{AA_1}{A_1P}=2$, $\frac{BB_1}{B_1P}=5$, $\frac{CC_1}{C_1P}=10$. В каком отношении плоскость $A_1B_1C_1$ делит объём данной пирамиды?

Ответ: 7:1577.

Решение задачи 9.



Обозначим через V объём данной пирамиды, через D_1 — точку пересечения плоскости $A_1B_1C_1$ с боковым ребром PD и через x — отношение $\frac{PD_1}{PD}$. Тогда $\overrightarrow{PD_1}=x\overrightarrow{PD}$. (*)

По условию $ABCD$ — параллелограмм, значит, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$, откуда $\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}$. Так как $\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PA_1}$, $\overrightarrow{PB}=6\overrightarrow{PB_1}$, $\overrightarrow{PC}=11\overrightarrow{PC_1}$, условие (*) принимает вид $\overrightarrow{PD_1}=3x\overrightarrow{PA_1}+11x\overrightarrow{PC_1}-6x\overrightarrow{PB_1}$. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости, следовательно, $3x+11x-6x=1$, откуда $x=\frac{1}{8}$. Таким образом, $\frac{PD_1}{PD}=\frac{1}{8}$.

Учитывая, что $V_{PABD}=V_{PBCD}=\frac{V}{2}$, далее имеем:

$$V_{PA_1B_1D_1}=\frac{PA_1\cdot PB_1\cdot PD_1}{PA\cdot PB\cdot PD}\cdot\frac{V}{2}=\frac{1\cdot1\cdot1}{3\cdot6\cdot8}\cdot\frac{V}{2}=\frac{1}{2\cdot3\cdot6\cdot8}\cdot V;$$

$$V_{PB_1C_1D_1}=\frac{PB_1\cdot PC_1\cdot PD_1}{PB\cdot PC\cdot PD}\cdot\frac{V}{2}=\frac{1\cdot1\cdot1}{6\cdot11\cdot8}\cdot\frac{V}{2}=\frac{1}{2\cdot6\cdot8\cdot11}\cdot V;$$

$V_{PA_1B_1C_1D_1}=V_{PA_1B_1D_1}+V_{PB_1C_1D_1}=\frac{7}{1584}\cdot V$, откуда искомое отношение равно 7:1577.